

КОДУВАННЯ ПІДФУНКЦІЙ ПРИ ФУНКЦІЙНІЙ ДЕКОМПОЗИЦІЇ У БАЗИСІ ПРОГРАМОВАНИХ ЛОГІКОВИХ МАТРИЦЬ

© Рицар Б., 2004

Запропоновано новий метод кодування підфункцій у задачах логікового синтезу цифрових пристроїв на ПЛМ теоретико-множинним методом функційної декомпозиції. Метод ґрунтується на так званому початковому кодуванні, що зберігає блокову структуру змінімованої системи функцій, заданих у ДНФ. Переваги методу кодування ілюструє приклад ПЛМ-реалізації двоблокової декомпозиції.

The new encoding method of sub-functions in the tasks of PLA-synthesis of digital devices by the theoretical-set of functional decomposition is offered. The method grounded on so-called initial encoding preserved a block structure of the minimized SOP-form of functions system. The advantage of method is illustrated by the example of PLA-realisation of bi-decomposition.

1. Постановка задачі

Під час синтезу цифрових пристроїв (ЦП) декомпозицією системи логікових (булевих) функцій $F(X) = \{f_i(X)\}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ виникає проблема вибору двійкових кодів для k підфункцій з деякої множини s -розрядних кодів ($s < n$), мінімальна довжина яких визначається як $s = \lceil \log_2 k \rceil$. Така задача спостерігається тоді, коли $F(X)$ не можна здекомпонувати до простої роздільної декомпозиції вигляду $\Phi(\Phi_1(X_1), X_2)$ ($k \leq 2$) і доводиться (при $k \geq 3$) реалізувати багаторазову (s -кратну) роздільну декомпозицію вигляду $\Phi(\Phi_1(X_1), \dots, \Phi_s(X_1), X_2)$, $s \geq 2$, де $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_s$ і Φ – відповідно, множини зв'язувальних і залишкових функцій; $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $X_1 \cup X_2 = X$ [1, 2, 3].

Проблема кодування набуває особливої ваги, коли синтез ЦП, що переважно описуються системою функцій в класі ДНФ, виконується на програмованих логікових матрицях (ПЛМ). У цьому випадку задача кодування стає оптимізаційною, оскільки від вибору кодів з $k!C_{2^s-1}^k$, $k \leq 2^s - 1$ можливих варіантів (у базисі ПЛМ кодова комбінація (00...0) переважно використовується для підфункцій-констант нуля) суттєво залежать параметри матриці І та матриці ЧИ кожної ПЛМ. Складність реалізації на ПЛМ(n, m, c) оцінюється сумарною інформаційною ємністю (площею) матриць І та ЧИ за формулою: $S = (2n + m)c$, де $2n$, m і c – кількість ліній, відповідно, вхідних (матриці І), вихідних (матриці ЧИ) і кон'юнкцій (матриці І) кожної ПЛМ, на яких реалізовано систему $F(X)$.

Відомі методи не завжди забезпечують вибір кращого коду і зводяться, як правило, до розв'язання задачі кодування як NP -повної. У [4] запропоновано метод так званого початкового кодування, що ґрунтується на теоретико-множинному підході до проблеми декомпозиції булевих функцій в класі ДНФ методом q -розбиття кон'юнктермів. Проте це лише квазіоптимальний шлях до вирішення проблеми. У цій роботі пропонується удосконалений метод кодування підфункцій, що дає змогу будувати оптимальну структуру ЦП на базі ПЛМ.

2. Основні поняття й означення

Під s -кратною роздільною декомпозицією системи булевих функцій $F(X) = \{f_i(X)\}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ розумітимемо її розклад до одного з видів суперпозиції функцій [5]:

$$F(X) = \Phi(\Phi_1(X^{n-q}), X^q), \quad q \in \{1, 2, \dots, (n-2)\} \quad (1)$$

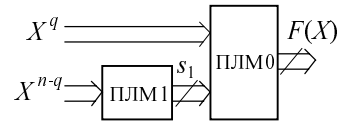


Рис. 1. Одноблокова декомпозиція (1)

$$F(X) = \Phi(X^{n-q}, \Phi_2(X^q)), \quad q \in \{2, 3, \dots, (n-1)\} \quad (2)$$

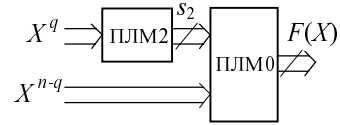


Рис. 2. Одноблокова декомпозиція (2)

$$F(X) = \Phi(\Phi_1(X^{n-q}), \Phi_2(X^q)), \quad q \in \{2, 3, \dots, (n-2)\} \quad (3)$$

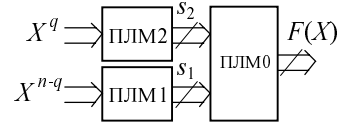


Рис. 3. Двоблокова декомпозиція (3)

де X^{n-q}, X^q – власні підмножини множини змінних X ; $X^{n-q} \cup X^q = X$, $X^{n-q} \cap X^q = \emptyset$, $|X^{n-q}| = n - q$, $|X^q| = q$; $\Phi_1 = \{\varphi_{11}, \dots, \varphi_{1s_1}\}$, $\Phi_2 = \{\varphi_{21}, \dots, \varphi_{2s_2}\}$ – множини зв’язувальних функцій $\varphi_{1i}(X^{n-q})$ і $\varphi_{2i}(X^q)$, а $\Phi = \{\varphi_{(1)}, \varphi_{(2)}, \dots, \varphi_{(m)}\}$ – множини залишкових функцій; функції φ_{1i} , φ_{2i} і $\varphi_{(i)}$ залежать від меншої кількості змінних, ніж f_i ; s_1, s_2 – кількість зв’язувальних функцій, причому в (1) – $s_1 + q \leq n - 1$, в (2) – $s_2 + n - q \leq n - 1$, а в (3) – $s_1 + s_2 \leq n - 2$.

Суперпозиції (1) і (2) називатимемо, відповідно, s_1 - і s_2 -кратними одноблоковими роздільними декомпозиціями, а суперпозицію (3) – s_1 - і s_2 -кратною двоблоковою роздільною декомпозицією. Зауважимо, що декомпозиція функцій системи $F(X)$ виконується сумісно для досягнення мінімальної кількості зв’язувальних функцій (виходів ПЛМ1 чи/і ПЛМ2).

Нехай задану в класі ДНФ систему $F(X) = \{f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $i = 1, 2, \dots, m$ приведено сумісною мінімізацією до найкоротшої форми. У теоретико-множинній формі (ТМФ) їй відповідає система $F(X) = \{Y_1^1, Y_2^1, \dots, Y_m^1\}$ множин кон’юнктермів θ_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, v_i$ [6], тобто:

$$Y_i^1 = \{\theta_{i1}, \theta_{i2}, \dots, \theta_{iv_m}\}^1, \quad i = \{1, m\}. \quad (4)$$

Внаслідок q -розбиття кон’юнктермів θ_{ij} за допомогою маски літералів $(l_{\alpha_1} l_{\alpha_2} \dots l_{\alpha_{n-q}} | l_{\beta_1} l_{\beta_2} \dots l_{\beta_q})$ система (4) перетвориться у досконалу теоретико-множинну декомпозиційну форму (досконалу ТМДФ Y_i^1):

$$Y_i^1 \xRightarrow{P^q} \{l_{\alpha_1} l_{\alpha_2} \dots l_{\alpha_{n-q}} | l_{\beta_1} l_{\beta_2} \dots l_{\beta_q}\} = \{\theta_{i1}^{n-q} | \theta_{i1}^q, \theta_{i2}^{n-q} | \theta_{i2}^q, \dots, \theta_{iv_m}^{n-q} | \theta_{iv_m}^q\}^1, \quad (5)$$

де $\xRightarrow{P^q}$ – оператор q -розбиття, $l_i \in \{0, 1, -\}$, $\theta_{ij}^{n-q} | \theta_{ij}^q$ – розбитий кон’юнктерм множини Y_i^1 , складений з двох субкон’юнктермів $(n - q)$ -класу – θ_{ij}^{n-q} і q -класу – θ_{ij}^q ; $q \in \{1, 2, \dots, (n-1)\}$.

У символічному зображенні система ТМДФ Y_i^1 матиме вигляд:

$$Y_i^1 = \{(A_{i1}) | (B_{i1}), (A_{i2}) | (B_{i2}), \dots, (A_{iv_m}) | (B_{iv_m})\}^1, \quad (6)$$

де $(A_{ij})|(B_{ij})$ – розбитий символний кон'юнктерм, складений з десятикових субмінтермів $(n-q)$ -класу – $A_{ij} = \{m_{\lambda_1}^{n-q}, m_{\lambda_2}^{n-q}, \dots, m_{\lambda_{2^q}}^{n-q}\}$ і q -класу – $B_{ij} = \{m_{\lambda_1}^q, m_{\lambda_2}^q, \dots, m_{\lambda_{2^q}}^q\}$; r_1 і r_2 – кількості поглинутих змінних, які у двійковому зображенні позначають рисою «–».

Наприклад, кон'юнктерм $(-01-)=\{(0010,0011,1010,1011)\}$ після маски $\{l_1l_2|l_3l_4l_5\}$ матиме символне (десятькове) зображення таке: $(A)|(B)=(0,2)|(2,3)$, де $A=(0,2)$ – множина субмінтермів $(n-q)$ -класу, а $B=(2,3)$ – множина субмінтермів q -класу.

Оскільки декомпозиція системи $F(X)$ передбачає наявність неперетних (ортогональних) множин субкон'юнктермів, то множини субмінтермів обох класів системи ТМДФ Y_i^1 (6) підлягають ортогоналізації [6], що відображатиме система:

$$Y_i^1 = \{(A_{i1})|(B_{i1}), (A_{i2})|(B_{i2}), \dots, (A_{iw_m})|(B_{iw_m})\}^1, \quad (7)$$

де $(A_{ij})|(B_{ij})$ – зортогоналізований розбитий символний кон'юнктерм, складений з блоків субкон'юнктермів $(n-q)$ -класу $A_{ij} = \{A_{\lambda_1}, \dots, A_{\lambda_{qj}}\}$ і q -класу $B_{ij} = \{B_{\lambda_1}, \dots, B_{\lambda_{qj}}\}$.

3. Початкове кодування

Суть пропонованого підходу полягає у заміні в системі (7) двійковими кодами: символів A_{ij} (у разі декомпозиції (1)), або символів B_{ij} (у разі декомпозиції (2)), або обох символів A_{ij} і B_{ij} (у разі декомпозиції (3)). Оскільки блокова структура (7) інваріантна щодо виду декомпозиції, то для опису методу обмежимося одним видом, наприклад (1) – $\Phi(\Phi_1(X^{n-q}), X^q)$. У цьому випадку значення зв'язаних змінних X^{n-q} в (7) закодовано символами з множини $\bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^{w_i} A_{ij} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$, елементами якої є k множин субкон'юнктермів $(n-q)$ -класу, які й підлягають s -розрядному кодуванню. Для цього побудуємо *кодувальну множину*, складену з усіх різних блоків A_{ij} системи (7), перейменувавши їх двійкові індекси на одинарні:

$$\{A_1, A_2, \dots, A_g\}, A_j \subset \{A_1, A_2, \dots, A_k\}, g \geq s. \quad (8)$$

Початкове кодування полягає в утворенні системи із g булевих функцій, кожна з яких представляє певний розряд двійкового коду. Для визначення цих функцій вважатимемо, що кожний елемент (блок A_j) кодувальної множини (8) задає певну ТМФ $A_j^1, j=1, 2, \dots, g$. Тоді початкове кодування відображатиме система ТМФ $\{A_1^1, A_2^1, \dots, A_g^1\}$:

$$A_j^1 = \{A_{\lambda_1}, A_{\lambda_2}, \dots, A_{\lambda_{qj}}\}^1, \bigcup_{j=1}^g A_j^1 = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}, j = \{1, \overline{g}\}. \quad (9)$$

Таблиця 1

Визначаючи кожне значення α_{ij} початкового коду за умовою

Початкове кодування

	A_1	A_2	...	A_g
A_1	α_{11}	α_{12}	...	α_{1g}
A_2	α_{21}	α_{22}	...	α_{2g}
...	...	...	...	...
A_k	α_{k1}	α_{k2}	...	α_{kg}

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } A_i \in A_j \\ 0, & \text{якщо } A_i \notin A_j \end{cases}, \quad (10)$$

побудуємо таблицю істинності системи (9), яку назовемо *таблицею початкового кодування* (табл. 1).

Початкове кодування є остаточним і оптимальним, якщо $g=s$. У разі $g>s$ оптимальні коди можна отримати з початкових стисненням таблиці початкового кодування. Зауважимо, що початкове кодування є квазіоптимальним, оскільки початкові коди

сформовано з блоків A_i кодувальної множини (8), яка побудована із сумісно змінімізованої системи функцій (7).

4. Формування оптимальних кодів

Стиснення таблиці кодування виконується об'єднанням її рядків і стовпців. Під час цих процедур може виникати небажане протиріччя – так звана *колізія*, коли дві чи більше кодовані множини отримали однакові кодові комбінації. Наявність колізії у таблиці початкового кодування усувається об'єднанням однакових рядків. Зменшення розрядності кодів забезпечує об'єднання стовпців за допомогою операції диз'юнкції над кожним розрядом вектор-стовпця, що не порушує блокової структури системи (7). Ця багатоваріантна (щодо вибору стовпців) процедура виконується до першого результату, який не викликав колізії, так: спочатку об'єднуються два стовпці в один (процедура $2 \rightarrow 1$), а якщо для всіх транспозицій стовпців (1,2), (1,3), ..., (1,g) існує колізія, то шукається результат для різних варіантів об'єднання трьох стовпців у два (процедура $3 \rightarrow 2$).

Процедуру об'єднання стовпців далі показано на булевій $(k \times g)$ -матриці та вектор-стовпці $(k \times 1)$ у десятковому зображенні:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1g} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{i1} & \cdots & \alpha_{ij} & \cdots & \alpha_{ig} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{kj} & \cdots & \alpha_{kg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \cdots \\ \beta_i \\ \cdots \\ \beta_k \end{bmatrix}, \alpha_{ij} \in \{0,1\}, \beta_i = \sum_{j=1}^g \alpha_{ij} 2^{g-j}.$$

Внаслідок диз'юнктивного об'єднання $2 \rightarrow 1$, наприклад 1-го і j -го стовпця, із занесенням результату в j -й стовпець, одержимо:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1g} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{i1} & \cdots & \alpha_{ij} & \cdots & \alpha_{ig} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{kj} & \cdots & \alpha_{kg} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \alpha_{11} \vee \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1g} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \alpha_{i1} \vee \alpha_{ij} & \cdots & \alpha_{ig} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \alpha_{k1} \vee \alpha_{kj} & \cdots & \alpha_{kg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \cdots \\ \gamma_i \\ \cdots \\ \gamma_k \end{bmatrix}.$$

Нехай $\alpha_{i1} = 1$. Тоді $\alpha_{11} \vee \alpha_{1j} = \alpha_{1j}$, ..., $\alpha_{i1} \vee \alpha_{ij} = 1$, ..., $\alpha_{k1} \vee \alpha_{kj} = \alpha_{kj}$, тобто:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \alpha_{11} \vee \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1g} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \alpha_{i1} \vee \alpha_{ij} & \cdots & \alpha_{ig} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \alpha_{k1} \vee \alpha_{kj} & \cdots & \alpha_{kg} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1g} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & \alpha_{ig} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \alpha_{kj} & \cdots & \alpha_{kg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \cdots \\ \gamma_i \\ \cdots \\ \beta_k \end{bmatrix}.$$

Отже, об'єднання $2 \rightarrow 1$, якщо $g = s + 1$, означає перенести перший стовпець в j -й стовпець, що відповідає заміні чисел зі значенням $\geq 2^{g-1}$ на числа зі значенням $< 2^{g-1}$. Для одної кодової комбінації, наприклад 10101 (41), процедура об'єднання $2 \rightarrow 1$ сформує коди: 011001 (25), 001001 (9), 001101 (13), 001011 (11), 001001 (9). Натомість об'єднання $3 \rightarrow 2$ для випадку $g = s + 1$ означає перенести перший стовпець одночасно у два інші стовпці комбінаторно, тобто спочатку в (2-3), (2-4), ..., ((2-g), потім (3-4), (3-5), ..., (3-g) і т. д. Зокрема, для цього ж коду 10101 (41) процедура об'єднання $3 \rightarrow 2$ сформує: 011001 (25), 011101 (29), 011011 (27), 011001 (25), 001101 (13), 001011 (11), 001001 (9), 001111 (15), 001101 (13), 001011 (11).

Зауважимо, що для визначення s можна скористатися загальноприйнятим виразом $s = \lceil \log_2 k \rceil$. Однак при цьому буде проігноровано важливу (для формування інформаційної ємності ПЛМ) властивість кодових комбінацій – блокову структуру системи (7).

Більш загальну (кількісну й якісну) оцінку кодів враховує параметр, який дорівнює кількості одиниць у таблиці кодування. Його назвемо *якістю кодів* і позначимо аббревіатурою CQ (від англ. *Code Quality*). На підставі CQ будь-яка (під)множина кодових комбінацій, довжина якої може бути стиснута до s , повинна задовольняти умову

$$(s-1) \cdot 2^{s-2} \leq CQ \leq s \cdot 2^{s-1}. \quad (11)$$

Очевидно, коди будуть якісно кращими у тієї таблиці кодування, яка має менше CQ , бо для певної реалізації вони забезпечуватимуть меншу площу ПЛМ. У цьому сенсі об'єднання $2 \rightarrow 1$, на відміну від об'єднання $3 \rightarrow 2$, має пріоритет щодо формування оптимальних кодів, оскільки, як засвідчує розглянутий вище приклад, не збільшує CQ .

Найпростішим (тривіальним) методом кодування, який не вимагає комбінаторного пошуку “найкращого” коду, є унітарне кодування (англ. *one-hot coding*) [2, 3]. Його легко реалізувати на ПЛМ, бо не вимагає спеціального програмування матриці ЧИ, або також на ПМЛ (програмованих матрицях логіки), де не передбачено програмування матриці ЧИ. Хоча недоліком такого методу є велика кількість кодувальних змінних, проте іноді саме за рахунок простоти його можна визнати оптимальним. Зокрема унітарне кодування буде оптимальним для малих потужностей кодувальної множини (8) або коли початкове кодування є остаточним, що дає підставу прийняти довжину кодів $s = g$.

5. Визначення складових суперпозицій

Сформовані описаним вище методом таблиці кодування є одночасно таблицями істинності певної системи зв'язувальних функцій Φ_1 чи Φ_2 , остаточний варіант якої одержимо після сумісної мінімізації. Щодо системи Φ , то її залишкові функції $\Phi_{(i)}$ залежать від зв'язувальних функцій Φ_{1i} (1), Φ_{2i} (2) і вільних змінних або тільки від Φ_{1i} і Φ_{2i} (3). Відповідно, область визначення $\Phi_{(i)}$ формується як результат об'єднання (композиції) підобластей значень зазначених вище складових. Ця обставина є визначальною у формуванні системи Φ (а отже, площі матриці І ПЛМ0), бо кон'юнктерми функцій $\Phi_{(i)}$ утворюються конкатенацією сформованих кодів, підставлених замість відповідних блоків розбитих кон'юнктермів ТМДФ Y_i^1 (7). Зазначимо при цьому, що, крім значень кодів, головним чинником у формуванні кон'юнктермів залишкових функцій $\Phi_{(i)}$ є також їх кількість k . Переважно у разі (1) – $k < (2^{s_1+q} - 1)$, у разі (2) – $k < (2^{s_2+n-q} - 1)$, а у разі (3) – $k < (2^{s_1+s_2} - 1)$, що є свідченням неповноти функцій $\Phi_{(i)}$ за рахунок появи так званих вільних кодів. Цей позитивний фактор вигідно використати для мінімізації системи Φ найкращим (щодо склеювання) доозначенням частинних залишкових функцій $\Phi_{(i)}$.

Запропонований метод кодування підфункцій далі показано на прикладі двоблокової декомпозиції (3) у базисі ПЛМ системи функцій, заданих у класі ДНФ.

6. Приклад*

Здекомпонувати систему функцій $F(X) = \{f_1, f_2, f_3\}$, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{12}\}$ (табл. 2) для маски q -розбиття $\{l_1 l_2 l_3 l_7 l_8 l_{11} \mid l_4 l_5 l_6 l_9 l_{10} l_{12}\}$ у базисі ПЛМ до виду двоблокової декомпозиції $\Phi(\Phi_1(X^{n-q}), \Phi_2(X^q))$.

Таблиця 2

Таблиця істинності												$f_1 f_2 f_3$		
$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10} x_{11} x_{12}$														
1 0 - 0 - 0 1 - - 1 1 0												1 0 0		
- 1 0 - 1 0 - 0 0 - 1 0												1 1 1		
1 - 0 0 - - - 0 1 0 1												0 1 0		
0 1 - 1 1 0 1 0 0 1 - -												0 1 1		

* Запозичено в [1].

Розв'язання. Внаслідок q -розбиття десяткових розбитих кон'юнктерів складемо табл. 3.

Таблиця 3

Розбиті кон'юнктерми системи

№	$\{l_1 l_2 l_3 l_7 l_8 l_{11} l_4 l_5 l_6 l_9 l_{10} l_{12}\}$	$f_1 f_2 f_3$
1	$(37, 39, 45, 47) (2, 6, 18, 22)$	1 0 0
2	$(17, 21, 49, 53) (16, 18, 48, 50)$	1 1 1
3	$(32, 34, 36, 38, 48, 50, 52, 54) (3, 11, 19, 27)$	0 1 0
4	$(20, 21, 28, 29) (50, 51)$	0 1 1

Позначивши символами ортогоналізовані множини субкон'юнктерів обох класів (табл. 4), побудуємо таблицю символічних розбитих кон'юнктерів системи (табл. 5).

Таблиця 4

Ортогоналізовані множини субкон'юнктерів

симв.	множини $(n-q)$ -класу	симв.	множини q -класу
A	(21)	F	(18)
B	(17, 49, 53)	G	(50)
C	(20, 28, 29)	H	(51)
D	(37, 39, 45, 47)	I	(16, 48)
E	(32, 34, 36, 38, 48, 50, 52, 54)	J	(2, 6, 22)
		K	(3, 11, 19, 27)

Таблиця 5

Символьні розбиті кон'юнктерми

1	$(D) (F, J), (A, B) (F, G, I)$	$(10-1-1) (0-0-10)$	1 0 0
2	$(A, B) (F, G, I), (E) (K), (A, C) (G, H)$	$(-10-01) (-100-0)$	1 1 1
3	$(E) (K)$	$(1-0-0) (0-011)$	0 1 0
4	$(A, C) (G, H)$	$(01-10-) (11001-)$	0 1 1

Отже, символічні ТМДФ Y_i^1 системи $F(X)$ матимуть вигляд:

$$\begin{cases} Y_1^1 = \{(D) | (F, J), (A, B) | (F, G, I)\}^1 \\ Y_2^1 = \{(A, B) | (F, G, I), (E) | (K), (A, C) | (G, H)\}^1, \\ Y_3^1 = \{(A, B) | (F, G, I), (A, C) | (G, H)\}^1 \end{cases}$$

Звідси кодувальною множиною $(n-q)$ -класу є $\{(D), (E), (A, B), (A, C)\}$, а q -класу – $\{(K), (F, J), (G, H), (F, G, I)\}$. Позначивши елементи цих множин в порядку їх запису, тобто для $(n-q)$ -класу – A_1', A_2', A_3', A_4' , а для q -класу – $A_1'', A_2'', A_3'', A_4''$, побудуємо за умовою (10) таблиці початкового кодування множин A, B, C, D, E (табл. 6) і множин F, G, H, I, J, K (табл. 7) та визначимо їх CQ .

Таблиця 6

	A_1'	A_2'	A_3'	A_4'
A	0	0	1	1
B	0	0	1	0
C	0	0	0	1
D	1	0	0	0
E	0	1	0	0
$CQ = 6$				

Таблиця 7

	A_1''	A_2''	A_3''	A_4''
F	0	1	0	1
G	0	0	1	1
H	0	0	1	0
I	0	0	0	1
J	0	1	0	0
K	1	0	0	0
$CQ = 8$				

Оскільки CQ обох таблиць є в межах 4–12, то, згідно з (11), мінімальна довжина кодів для множин $(n - q)$ - і q -класу буде однакою, тобто $s_1 = s_2 = 3$.

Визначимо спочатку шукані коди процедурою об'єднання $2 \rightarrow 1$:

$$\begin{array}{l} A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ \mathbf{8} \\ 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{2 \rightarrow 1} \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \emptyset; \\ F \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ \mathbf{8} \end{bmatrix} \xrightarrow{2 \rightarrow 1} \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \emptyset. \end{array}$$

Отже, поява колізії в обох класах об'єднання $2 \rightarrow 1$ не дає результату. Виконаємо об'єднання $3 \rightarrow 2$:

$$\begin{array}{l} \text{для } (n - q)\text{-класу} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ \mathbf{8} \\ 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{3 \rightarrow 2} \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ C \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1. \{ (D, E), (A, B, D), (A, C) \} \\ 2. \{ (D, E), (A, B), (A, C, D) \} \end{array} \right\}; \\ \text{для } q\text{-класу} - \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ \mathbf{8} \end{bmatrix} \xrightarrow{3 \rightarrow 2} \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 1. \{ (F, J, K), (G, H, K), (F, G, I) \} \\ G \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 1. \{ (F, J, K), (G, H, K), (F, G, I) \} \\ H \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 1. \{ (F, J, K), (G, H, K), (F, G, I) \} \\ I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 1. \{ (F, J, K), (G, H, K), (F, G, I) \} \\ J \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 1. \{ (F, J, K), (G, H, K), (F, G, I) \} \\ K \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 1. \{ (F, J, K), (G, H, K), (F, G, I) \} \end{array} \right\}. \end{array}$$

Розглянувши інші варіанти кодувань, що визначаються транспозиціями стовпців (A_1, A_2) , (A_1, A_3) , (A_1, A_4) (табл. 6 і табл. 7), одержимо решту розв'язків для

$$(n - q)\text{-класу} \left\{ \begin{array}{l} 3. \{ (D, E), (A, B, E), (A, C) \} \\ 4. \{ (D, E), (A, B), (A, C, E) \} \\ 5. \{ (A, B, E), (A, B, D), (A, C) \} \\ 6. \{ (A, C, E), (A, B), (A, C, D) \} \end{array} \right\} \text{ і } q\text{-класу} \left\{ \begin{array}{l} 2. \{ (F, J, K), (F, G, H, J), (F, G, I) \} \\ 3. \{ (F, G, H, J), (G, H, K), (F, G, I) \} \end{array} \right\}.$$

Усі отримані розв'язки виявилися рівноцінними щодо реалізації. Тому зв'язувальні функції системи $\Phi_1(X^{n-q}) = \{\Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{13}\}$, $\Phi_{1i}(x_1, x_2, x_3, x_7, x_8, x_{11})$, яку реалізуватиме ПЛМ1, і системи $\Phi_2(X^q) = \{\Phi_{21}, \Phi_{22}, \Phi_{23}\}$, $\Phi_{2i}(x_4, x_5, x_6, x_9, x_{10}, x_{12})$, яку реалізуватиме ПЛМ2, визначимо за розв'язками 1) для обох класів. Тоді ТМФ Φ_{1i}^1 , $i = 1, 2, 3$ системи Φ_1 і ТМФ Φ_{2i}^1 , $i = 1, 2, 3$ системи Φ_2 матимуть такий вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{11}^1 = \{D, E\}^1 = \{(10-1-1), (1-0--0)\}^1 \\ \Phi_{12}^1 = \{A, B, E\}^1 = \{(-10-01), (1-0--0)\}^1 \\ \Phi_{13}^1 = \{A, C\}^1 = \{(01-10-)\}^1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{21}^1 = \{F, J, K\}^1 = \{(0-0-10), (0--011)\}^1 \\ \Phi_{22}^1 = \{G, H, K\}^1 = \{(11001-), (0--011)\}^1 \\ \Phi_{23}^1 = \{F, G, I\}^1 = \{(-100-0)\}^1 \end{array} \right.$$

Оскільки системи Φ_1 і Φ_2 мають по 4 різні кон'юнктерми, то матриці 1 відповідних ПЛМ матимуть по 4 лінії термів.

Система залишкових функцій $\Phi = \{\Phi_{(1)}, \Phi_{(2)}, \Phi_{(3)}\}$, $\Phi_{(i)}(\Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{13}, \Phi_{21}, \Phi_{22}, \Phi_{23})$, $i = 1, 2, 3$, яку реалізуватиме ПЛМ0, одержуються із символічних ТМДФ Y_i^1 конкатенуванням (оператор $\Rightarrow$) кодів множин обох класів (табл. 5). Оскільки на виходах ПЛМ1 і ПЛМ2 сформулюються неповні множини кодів, то залишкові функції $\Phi_{(i)}$ будуть частинними. Їх доозначимо за рахунок вільних (відсутніх серед остаточно сформованих) кодів так, щоб утворювались мінімальні ТМФ $\Phi_{(i)}^1$. Серед

кодів множин $(n - q)$ -класу вільними є $W_1 = 101$ і $W_2 = 111$, а серед кодів множин q -класу – $V = 111$. Отже, в результаті мінімального доозначення та конкатенації одержимо:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_1^1 \Rightarrow \{(D, W_2) | (F, J), (A, B) | (F, G, I, V)\}^1 \xRightarrow{con} \Phi_{(1)}^1 = \{(11-10-), (01---1)\}^1 \\ Y_2^1 \Rightarrow \{(A, B) | (F, G, I, V), (E, W_1) | (K, V), (A, C, W_1, W_2) | (G, H)\}^1 \xRightarrow{con} \\ \Phi_{(2)}^1 = \{(01---1), (10-11-), (--101-)\}^1 \\ Y_3^1 \Rightarrow \{(A, B) | (F, G, I, V), (A, C, W_1, W_2) | (G, H)\}^1 \xRightarrow{con} \Phi_{(3)}^1 = \{(01---1), (--101-)\}^1 \end{array} \right.$$

Отже, щоб зреалізувати систему Φ залишкових функцій $\Phi_{(i)}^1$ на ПЛМ0 потрібно мати також 4 лінії термів (табл. 8).

Таблиця 8

Таблиця програмування ПЛМ0

№	$\Phi_{11}\Phi_{12}\Phi_{13}\Phi_{21}\Phi_{21}\Phi_{23}$	$f_1 f_2 f_3$
1	1 1 - 1 0 -	1 . .
2	0 1 - - - 1	1 1 1
3	1 0 - 1 1 -	. 1 .
4	- - 1 0 1 -	. 1 1

На рис. 2 показано двоблокову декомпозицію (3) $\Phi(\Phi_1(X^{n-q}), \Phi_2(X^q))$ заданої системи $F(X)$, побудовану на трьох ПЛМ(6,3,4) на основі запропонованого методу оптимального кодування. З метою порівняння на рис. 3 показано декомпозицію цієї ж системи для випадку унітарного кодування. Табл. 8 і 9 ілюструють відмінність програмування ПЛМ0 розглянутих методів кодування.

Інформаційна ємність (площа S_i , в [біт]) ПЛМ, як добуток кількості горизонтальних ліній на кількість вертикальних ліній, визначається так: ПЛМ1 (табл. 6) має $S_1 = 12 \times 4 = 48$ [біт]; ПЛМ2 (табл. 7) – $S_2 = 11 \times 4 = 44$ [біт]; ПЛМ0 (табл. 8) – $S_0 = 14 \times 4 = 56$ [біт]. Отже, загальна площа ПЛМ $S = S_1 + S_2 + S_0 = 148$ [біт], що є кращим результатом, ніж у [1, с. 349].

Таблиця 9

Таблиця програмування ПЛМ0

№	$\Phi_{11}\Phi_{12}\Phi_{13}\Phi_{14}\Phi_{21}\Phi_{21}\Phi_{23}\Phi_{24}$	$f_1 f_2 f_3$
1	1 - - - 1 - - -	1 . .
2	- 1 - - - 1 - -	1 1 1
3	- - 1 - - - 1 -	. 1 .
4	- - - 1 - - - 1	. 1 1

Таблиця 10

Порівняльна таблиця

Площа ПЛМ в [біт]	За даними [1,7]	Унітарне кодування	Оптимальне кодування
ПЛМ1	$12 \times 4 = 48$	$13 \times 4 = 52$	$12 \times 4 = 48$
ПЛМ2	$11 \times 4 = 44$	$12 \times 4 = 48$	$11 \times 4 = 44$
ПЛМ0	$15 \times 4 = 60$	$11 \times 4 = 44$	$13 \times 4 = 52$
загальна	152	144	144

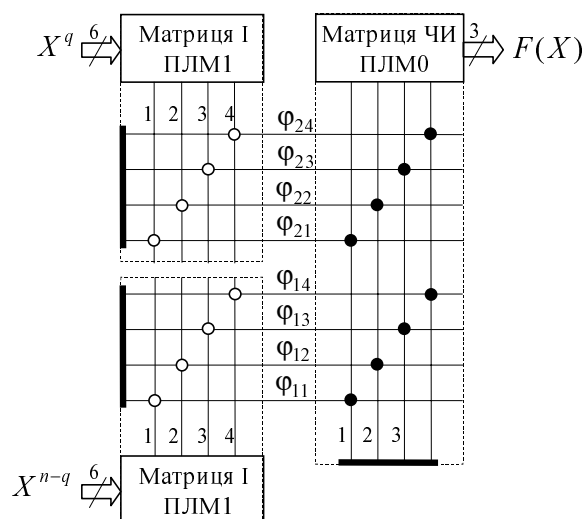


Рис. 3. Схема здекомпонованої системи $F(X)$ на ПЛМ для випадку унітарного кодування

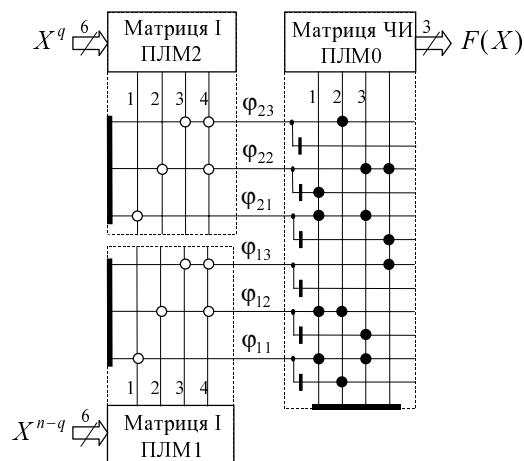


Рис. 2. Схема здекомпонованої системи $F(X)$ на ПЛМ для випадку оптимального кодування

7. Висновок

Запропонований метод вигідно відрізняється від відомих [1, 2, 3, 4] тим, що забезпечує оптимальне кодування підфункцій простими засобами теорії множин.

1. Закревский А.Д. Логический синтез каскадных схем. – М.: Наука, 1981. – 414 с. 2. Sasao T. Application of Multi-Valued Logic to a Serial Decomposition of PLA's // IEEE Trans. Comput. – 1989. – P. 264–271. 3. Бибило П.Н. Синтез комбинационных ПЛМ-структур для СБИС. – Минск: Наука і техника, 1992. – 231 с. 4. Рицар Б.Є. Теоретико-множинний підхід до синтезу цифрових пристроїв методом функційної декомпозиції // Праці 1-ї міжнар. конф. з індуктивного моделювання МКІМ 2002, Львів, травень, 2002. – С.214–220. 5. Рыцар Б.Є. Новый подход к декомпозиции булевых функций методом q -разбиений. 2. Повторная декомпозиция // Кибернетика и системный анализ. – 2002. – №1. – С.3–12. 6. Рицар Б.Є. Функційна декомпозиція в класі ДНФ методом q -розбиття кон'юнктерів // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". – 2001. – №433. – С.212–225.