тинними похідними // УМЖ. 1996. Т.48, №2. С.184-194. 4. Берник В.И., Пташник Б.И., Салыга Б.О. Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // ДУ "Львівська політехніка". 1977. Т.13. №4. С.637-645. 5. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. К., 1984. 6. Підстригач конф. 7. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М., 1984. 8. Илькив В.С., Пташник Б.И. Задача с нелокальными краевыми условиями для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // ДУ "Львівська політехніка". 1984. Т.20. №6. С.1012-1023. 9. Хинчин А.Я. Цепные дроби. М., 1978. 10. Колмогоров А.Н., Арнольд В.И. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // ДАН СССР. 93. №5. 1953. С.763-766. 11. Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН. 18. №6. 1963. С.91-192. 12.Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Метод ускоренной сходимости в небесной механике. К., 1969. 13. Гребенников Е.А., Рябов Ю.А. Резонансы и малые знаменатели в небесной механике. М., 1978.

УДК 517.948

О.М. Дашко
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра обчислювальної математики і програмування

АНАЛОГИ МЕТОДУ КУРПЕЛЯ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЗАПІЗНЕННЯМ

© О.М. Дашко, 2000

Запропоновано двосторонній метод, який не тільки зберігає надлінійну збіжність курпелівських алгоритмів, а й не вимагає диференційовності правої частини рівняння $x'(t) = f(t,x)$ щодо *x*.

Twosided method, which is not only saving the super linear convergence of Kurlel's algorithms, but does not demand the differentiability with respect fox of the right term of the equation $x'(t) = f(t,x)$ is proposed *x*.

Тут поширимо методику побудови аналогів двосторонніх алгоритмів Курпеля [1] на звичайні диференціальні рівняння, які містять запізнення аргументу. Застосування двосторонніх алгоритмів до таких класів рівнянь започатковане у дослідженнях Г.М. Жданова [2], А.Д. Мишкіса [3] (див. також [1]).

Будемо розглядати рівняння вигляду

$$x'(t) = g(t, x(t), x(\tau(t))) - h(t, x(t), x(\tau(t))), \tag{1}$$

де $\tau(t) = t - \Delta(t)$, $\Delta(t) \geq 0$ при $t \in [t_0, T]$ – неперервна і неперервні при $t \in [t_0, T]$, $y, s \in S(x_0, M)$ функції $g(t,y,z)$, $h(t,y,z)$. Шукатимемо неперервно диференційовний при $t \in [t_0, T]$ розв'язок $x(t)$ рівняння (1), який задовольняє початкову умову

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

$$x(t)=\varphi(t)\left(t\in E_0=\left\{t\middle|t\le t_0,t\in R^1\right\}\right) \tag{2}$$

з неперервною функцією $\varphi(t)$.

Умовою B_{11} назвемо умову: задані неперервні при $t\in[t_0,T]$, $y,z,p,q\in S(x_0,M)$, неспадаючі щодо y та p, незростаючі щодо z та q функції $a_{1i}(t,y,z,p,q)$, $\alpha_{1i}(t,y,z,p,q)$, $b_{1i}(t,y,z,p,q)$, $\beta_{1i}(t,y,z,p,q)$, для яких із співвідношень $t\in[t_0,T]$, $y\le z$, $p\le q$, $y,z,p,q\in S(x_0,M)$ випливають співвідношення

$$\begin{aligned}
&\left(a_{11}(t,y,z,p,q)+\alpha_{11}(t,y,z,p,q)\right)(z-y)+\\
&+\left(a_{12}(t,y,z,p,q)+\alpha_{12}(t,y,z,p,q)\right)(q-p)\le\\
&\le g(t,z,q)-g(t,y,p),\\
&\left(b_{11}(t,y,z,p,q)+\beta_{11}(t,y,z,p,q)\right)(z-y)+\\
&+\left(b_{12}(t,y,z,p,q)+\beta_{12}(t,y,z,p,q)\right)(q-p)\le\\
&\le h(t,z,q)-h(t,y,p),
\end{aligned} \tag{3}$$

причому

$$\begin{aligned}
&\alpha_{1i}(t,y,z,p,q)\ge 0,\beta_{1i}(t,y,z,p,q)\ge 0,\\
&a_{1i}(t,y,z,p,q)\ge 0,b_{12}(t,y,z,p,q)\ge 0(i=1,2).
\end{aligned} \tag{4}$$

Задамо неперервно диференційовні при $t\in[t_0,T]$ функції $u(t)$, $v(t)\in S(x_0,M)$, для яких

$$u(t)\le\varphi(t)\le v(t)(t\in E_0), \tag{5}$$

$$u(t)\le v(t)(t\in[t_0,T]), \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
&u'(t)\le g(t,u(t),u(\tau(t)))-h(t,v(t),v(\tau(t))),\\
&v'(t)\ge g(t,v(t),v(\tau(t)))-h(t,u(t),u(\tau(t)))(t\in[t_0,T]).
\end{aligned} \tag{7}$$

Для побудови послідовностей $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$ скористаємося формулами

$$y_0(t)=u(t),z_0(t)=v(t), \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
&y'_{n+1}(t)=a_{11}(t,y_n(t),z_n(t),y_n(\tau(t),z(\tau(t))))(y_{n+1}(t)-y_n(t))+\\
&+a_{12}(t,y_n(t),z_n(t),y_n(\tau(t),z(\tau(t))))(y_{n+1}(\tau(t))-y_n(\tau(t)))+\\
&+b_{11}(t,y_n(t),z_n(t),y_n(\tau(t),z(\tau(t))))(z_{n+1}(t)-z_n(t))-\\
&-b_{12}(t,y_n(t),z_n(t),y_n(\tau(t),z(\tau(t))))(z_{n+1}(\tau(t))-z_n(\tau(t)))+\\
&+g(t,y_n(t),y_n(\tau(t)))-h(t,z_n(t),z_n(\tau(t))),
\end{aligned}$$

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

$$
\begin{aligned}
z'_{n+1}(t) &= [a_{11}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t), z(\tau(t)))) + \\
&+ \alpha_{11}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t), z(\tau(t))))](z_{n+1}(t) - z_n(t)) + \\
&+ [a_{12}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t), z(\tau(t)))) + \\
&+ \alpha_{12}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t), z(\tau(t))))](z_{n+1}(\tau(t)) - z_n(\tau(t))) + \\
&+ [b_{11}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t), z(\tau(t)))) + \\
&+ \beta_{11}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t), z(\tau(t))))](y_{n+1}(t) - y_n(t)) + \\
&+ [b_{12}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t), z(\tau(t)))) + \\
&+ \beta_{12}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t), z(\tau(t))))](y_{n+1}(\tau(t)) - y_n(\tau(t))) + \\
&+ g(t, z_n(t), z_n(\tau(t))) - h(t, y_n(t), y_n(\tau(t))),
\end{aligned} \tag{9}
$$

з початковими умовами

$$
y_{n+1}(t) = z_{n+1}(t) = \varphi(t)(t \in E_0). \tag{10}
$$

Теорема 1. *Нехай справджується умова* B_{11} *і функції* $u(t)$, $v(t)$ *задовольняють (5)-(7). Тоді для ітераційного процесу (8)-(10) справджуються співвідношення*

$$
y_n(t) \le y_{n+1}(t) \le z_{n+1}(t) \le z_n(t)(n = 0,1,\ldots; t \in [t_0, T]). \tag{11}
$$

Теорема 2. *Якщо справджуються умови теореми 1 і система рівнянь*

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= g(t, y(t), y(\tau(t))) - h(t, z(t), z(\tau(t))), \\
z'(t) &= g(t, z(t), z(\tau(t))) - h(t, y(t), y(\tau(t)))(t \in [t_0, T])
\end{aligned} \tag{13}
$$

з початковою умовою

$$
y(t) = z(t) = \varphi(t)(t \in E_0) \tag{14}
$$

має на $[t_0, T]$ *єдиний неперервно диференційовний розв'язок, то має неперервно диференційовний на* $[t_0, T]$ *розв'язок* $x(t)$ *задача (1), (2). При цьому правдиві співвідношення*

$$
y_n(t) \le y_{n+1}(t) \le x(t) z_{n+1}(t) z_n(t)(t \in [t_0, T]) \tag{15}
$$

і послідовності $\{y_n(t)\}$ *та* $\{z_n(t)\}$ *збігаються на* $[t_0, T]$ *рівномірно до* $x(t)$, *відповідно монотонно не спадаючи та монотонно не зростаючи.*

Умова B_{21} означатиме, що, крім функцій a_{1i}, α_{1i}, b_{1i}, β_{1i} з постульованими для них умовою B_{21} властивостями, задані також такі неперервні невід'ємні функції $\alpha_{2i} = (t, y, z, p, q)$, $\beta_{2i} = (t, y, z, p, q)$ $(i = 1,2)$, для яких співвідношення $t \in [t_0, T]$, $y \le z$, $p \le q$, $y, z, p, q \in S(x_0, M)$, призводить до співвідношень

$$
\begin{aligned}
&g(t,z,q) - g(t,y,p) \le (a_{11}(t,y,z,p,q) + \alpha_{21}(t,y,z,p,q))(z - y) + \\
&+ (a_{12}(t,y,z,p,q) + \alpha_{22}(t,y,z,p,q))(q - p), \\
&h(t,z,q) - h(t,y,p) \le (b_{11}(t,y,z,p,q) + \beta_{21}(t,y,z,p,q))(z - y) + \\
&+ (b_{12}(t,y,z,p,q) + \beta_{22}(t,y,z,p,q))(q - p).
\end{aligned} \tag{16}
$$

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Теорема 3. *Нехай справджються умови* B_{11} *та* B_{21} *і функції* $u(t)$, $v(t)$ *задовольняють співвідношення (5)-(7). Тоді при* $t \in [t_0, T]$, $n = 0,1,...$ *правдиві оцінки*

$$\begin{aligned} z'_{n+1}(t) - y'_{n+1}(t) \le\ & f_n^{(2)}(t)(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t)) + \\ & + \varphi_n^{(2)}(t)(z_{n+1}(\tau(t)) - y_{n+1}(\tau(t))) + \\ & + f_n^{(1)}(t)(z_n(t) - y_n(t)) + \varphi_n^{(1)}(t)(z_n(\tau(t)) - y_n(\tau(t))), \end{aligned} \tag{17}$$

де

$$\begin{aligned} f_n^{(1)}(t) &= \alpha_{21}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t)), z_n(\tau(t))) + \\ &+ \beta_{21}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t)), z_n(\tau(t))), \\ \varphi_n^{(1)}(t) &= \alpha_{22}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t)), z_n(\tau(t))) + \\ &+ \beta_{22}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t)), z_n(\tau(t))), \\ f_n^{(2)}(t) &= a_{11}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t)), z_n(\tau(t))) + \\ &+ b_{11}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t)), z_n(\tau(t))), \\ \varphi_n^{(2)}(t) &= \alpha_{22}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t)), z_n(\tau(t))) + \\ &+ \beta_{22}(t, y_n(t), z_n(t), y_n(\tau(t)), z_n(\tau(t))). \end{aligned} \tag{18}$$

Зазначимо, що в тому випадку, коли до системи (9) застосований відомий в теорії диференціальних рівнянь із запізненням метод кроків (див., напр. [5]), то можна отримати квадратичну збіжність цього алгоритму. Йдеться, очевидно, про ситуацію, коли

$$\Delta(t) \ge \Delta_0 > 0. \tag{19}$$

Якщо замість (19) маємо тільки $\Delta(t) \ge 0$, то отримують грубіші його збіжності за деяких додаткових припущень щодо функцій g і h. Щодо цього, не вдаючись до докладнішого викладення, зазначимо, що за припущень, які гарантують нерівності $z'_n(t) - y'_n(t) \ge 0$ при $t \in [t_0, T]$, $n = 0,1,...$, можна з (17) отримати

$$z'_{n+1}(t) - y'_{n+1}(t) \le f_n(t)(z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t)) + \varphi_n(t)(z_n(t) - y_n(t)), \tag{20}$$

де $f_n(t) = f_n^{(2)}(t) + \varphi_n^{(2)}(t)$, $\varphi_n(t) = f_n^{(1)}(t) + \varphi_n^{(1)}(t)$. Це призводить до оцінки вигляду

$$z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t) \le \int_{t_0}^{t} \varphi_n(s)(z_n(s) - y_n(s)) e^{\int_s^t f_n(\xi) d\xi} ds, \tag{21}$$

Інші грубіші оцінки можна було б отримати, наприклад, із (20) та (21), якщо використати замість $f_n(t)$ та $\varphi_n(t)$ їх оцінки $f_n(t) \le M_1$, $\varphi_n(t) \le M_2$, причому $f_n(t) \ge 0$.

Якщо метод кроків незастосовний, то виникають додаткові труднощі щодо можливості практичного розв'язання системи (9) щодо $(y_{n+1}(t), z_{n+1}(t))$. Тому доцільно

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

розглянути алгоритм, який використовує формули (8) і (10), але у якому систему рівнянь (9) замінимо спрощеною системою вигляду

$$\begin{aligned} &y'_{n+1}(t) = a_{11}^{(n)}(t)\big(y_{n+1}(t) - y_n(t)\big) - b_{11}^{(n)}(t)\big(z_{n+1}(t) - z_n(t)\big) + \\ &+ g\big(t, y_n(t), y_n(\tau(t))\big) - h\big(t, z_n(t), z_n(\tau(t))\big), \\ &z'_{n+1}(t) = \Big(a_{11}^{(n)}(t) + \alpha_{11}^{(n)}(t)\Big)\big(z_{n+1}(t) - z_n(t)\big) - \\ &- \Big(b_{11}^{(n)}(t) + \beta_{11}^{(n)}(t)\Big)\big(y_{n+1}(t) - y_n(t)\big) + \\ &+ g\big(t, z_n(t), z_n(\tau(t))\big) - h\big(t, y_n(t), y_n(\tau(t))\big), \end{aligned} \tag{22}$$

де маємо на увазі позначення (12).

Теорема 4. *Нехай справджується умова* B_{11}, *задані неперервно диференційовні при* $t \in [t_0, T]$ *функції* $u(t)$, $v(t)$ *задовольняють співвідношення (5)-(7) і задача (13), (14) має єдиний розв'язок в класі неперервно диференційовних на* $[t_0, T]$ *пар функцій. Тоді для єдиного неперервно диференційовного на* $[t_0, T]$ *розв'язку* $x(t)$ *задачі (1), (2) і послідовностей* $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$, *утворених за допомогою алгоритму (8), (10), (22), правдиві при* $t \in [t_0, T]$, $n = 0,1,...$ *співвідношення (15).*

Приєднання до умов теореми 4 умови B_{21} призводить до формальної оцінки вигляду (17) . Зокрема, для $\varphi_n^{(2)}(t)$ матимемо

$$\varphi_n^{(2)}(t) = 0 \big(t \in [t_0, T], n = 0,1,...\big). \tag{23}$$

Саме цей факт (без докладнішого аналізу структури функцій $f_n^{(1)}(t)$, $\varphi_n^{(1)}(t)$, $f_n^{(2)}(t)$, які отримуються для досліджуваного алгоритму замість формул (18)) спричинює те, що надлінійну збіжність для алгоритму (8), (10), (22) можна отримати хіба-що, взагалі кажучи, тільки у тому випадку, коли справджується строга нерівність в (19) й тому застосовний метод кроків. Однак з огляду на те, що система (9) містить запізнення у доданках з індексами $n+1$, її вдається розв'язати щодо $y_{n+1}(t)$, $z_{n+1}(t)$ тільки у виняткових випадках. Це виправдовує потребу побудови спрощених аналогів алгоритму (8)-(10). Алгоритм (8), (10), (22) можна розглядати як один з таких спрощених аналогів процесу (8)-(10).

1. Курпель Н.С., Шувар Б.А. Двусторонние операторные неравенства и их применения. К., 1980. 2. Жданов Г.М. О приближенном решении системы дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами // Успехи мат. наук. 1961. Вып. 1.0 С. 143-148. 3. Мышкис А.Д. Замечания к статье Г.М. Жданова О приближенном решении системы дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами // Успехи мат. наук. 1961. Вып. 2. С. 131-135.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua