ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.718 № 718, (2011) с. 54–60

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.718 No 718, (2011) 54–60

ІНВОЛЮТИВНІ МНОЖИНИ З ДВОХ ОПЕРАТОРІВ УМОВНОЇ ІНВАРІАНТНОСТІ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

М.І. Сєров, Н.В. Ічанська

Полтавський національний технічний університет ім. Юрія Кондратюка
Першотравневий проспект, 24, Полтава, Україна

(Отримано 24 жовтня 2011 р.)

Досліджена Q-умовна симетрія нелінійних рівнянь теплопровідності відносно інволютивних множин двох операторів. Знайдено нові інволютивні множини з двох операторів, відносно яких ці рівняння є Q-умовно інваріантними.

Ключові слова: нелінійні рівняння, алгебра Лі, оператор симетрії, точні розв'язки.

2000 MSC: 58J70, 35A30

УДК: 517.945:519.46

I. Вступ

Однією з центральних проблем сучасного теоретико-групового аналізу нелінійних багатовимірних диференціальних рівнянь з частинними похідними є відбір із всіх можливих математичних моделей (рівнянь чи систем) тих, що задовольняють той чи інший принцип відносності (Галілея, Пуанкаре–Ейнштейна та інших). Одним з критеріїв такого відбору, зокрема, може бути симетрія диференціальних рівнянь. Її широко застосовують для знаходження їх інваріантних розв'язків. Основи такого застосування заклав наприкінці XIX ст. видатний норверзький математик Софус Лі. Теорію С. Лі розвивали та вдосконалювали в працях багато видатних математиків XIX–XX ст.

Одним з таких вдосконалень методу Лі є метод умовних симетрій. Перші кроки в цьому напрямку були зроблені Блюменом і Коулом ще у 1969 р.[13]. Проте, нетривіальні приклади таких симетрій для нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними з'явились значно пізніше в роботах П. Олвера, В.І. Фущича. Ці праці, разом з роботами В.І. Фущича та його учнів (1989 р.), започаткували метод дослідження умовної симетрій нелінійних диференціальних рівнянь. Розв'язуванню зазначених вище задач присв'ячена ця робота.

Усі основні рівняння математичної фізики (рівняння Ньютона, Лапласа, д'Аламбера, Шредінгера, Ліувілля, Дірака, Максвелла і т.д.) інваріантні відносно достатньо широких груп перетворень. Саме ця властивість виділяє їх із множини інших диференціальних рівнянь. Одними з таких рівнянь є нелінійні рівняння теплопровідності, які внаслідок свого широкого застосування є цікавим об'єктом дослідження. Задачею дослідження симетрійних властивостей лінійного рівняння теплопровідності займався ще Софус Лі. На прикладі лінійного рівняння теплопровідності Блумен і Коул [13] ввели поняття некласичної симетрії диференціальних рівнянь.

Задачу дослідження Q-умовної симетрії рівняння теплопровідності розглядали багато авторів. Так, Q-умовна інваріантність лінійного одновимірного рівняння теплопровідності вивчена в роботах [14, 17]. Задача про Q-умовну симетрію лінійного n-вимірного рівняння теплопровідності розв'язана в [5]. У роботах [6, 8, 9, 10, 15, 11] досліджена умовна та Q-умовна симетрія одновимірних (1+1) нелінійних рівнянь теплопровідності

$$H(u)u_0 + u_{11} = F(u). \tag{1}$$

Ця робота присвячена дослідженню Q-умовної симетрії нелінійних (1+2)-вимірних рівнянь теплопровідності:

$$H(u)u_0 + \triangle u = F(u), \tag{2}$$

де $u = u(x) \in \mathbb{R}^1, x = (x_0, \vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}^2, H(u)$ та $F(u)$ — довільні гладкі функції. Будь-яке рівняння (2) за допомогою заміни $u \to \int H(u)du$ можна призвести до вигляду

$$u_0 + \nabla(g(u)\nabla u) = f(u), \tag{3}$$

де g та f виражаються через F та H.

Q-умовну симетрію рівнянь (2) відносно оператора

$$Q = A(x,u)\partial_0 + B^a(x,u)\partial_a + C(x,u)\partial_u, \tag{4}$$

вивчено в роботі [3], в якій докладно описано оператори (4), відносно яких за умови $H \neq 0$, рівняння (2) є Q-умовно інваріантними. Зазначимо, що лієвська симетрія нелінійних рівнянь теплопровідності у вигляді (3) добре вивчена для довільної кількості просторових змінних. Цій темі присвячено багато робіт [1, 2, 7, 4], де знайдено МАІ рівнянь (3) залежно від вигляду функцій g, f та значення n. У роботі [3] наведено результати вичерпної групової класифікації в класі рівнянь (2) з погляду перетворень еквівалентності, наведених в теоремі 1.

Теорема 1 *Максимальною локальною групою $G^{\sim}$ точкових перетворень еквівалентності рівнянь (2)* *є група, що складається з перетворень*

$$x_0 \to \beta_0 x_0 + \alpha_0, \quad x_a \to \beta_1 \gamma_{ab} x_b + \alpha_a, \quad u \to \beta_2 u + \alpha_3,$$
$$H \to \beta_0 \beta_1^{-2} H, \qquad F \to \beta_2 \beta_1^{-2} F, \tag{5}$$

де $\beta_0\beta_2 \neq 0$, $\beta_1 > 0$, α_l, γ_{ab} *— сталі*, $(\gamma_{ab}) \in O(2)$, $a, b = 1, 2$, $l = \overline{0, 3}$.

Використовуючи результати, одержані в роботах [2, 16, 3] для рівнянь (3), наведемо результати групової класифікації в вигляді наступної теореми.

Теорема 2 *Для будь-яких значень функцій H та F з точністю до групи еквівалентності (5) групова класифікація нелінійних рівнянь (2) вичерпно описується випадками, що наведені в табл. 1.*

Зауваження. Зазначимо також, що локальними перетвореннями

$$\begin{array}{l} u \to e^{\lambda_0 x_0} u, \ x_0 \to \frac{1}{\lambda_0 k} e^{\lambda_0 k x_0} \\ \text{та} \\ u \to u - \lambda_0 x_0, \ x_0 \to -\frac{1}{\lambda_0} e^{-\lambda_0 x_0} \end{array} \tag{6}$$

рівняння $u^k u_0 + \triangle u = \lambda_0 u^{k+1} + \lambda u$, $e^u u_0 + \triangle u = \lambda_0 e^u + \lambda$ зводяться, відповідно, до рівнянь $u^k u_0 + \triangle u = \lambda u$, $e^u u_0 + \triangle u = \lambda$. Тому в табл. 1 випадки, що мають один номер зводяться один до другого, а саме $3a \to 3\,(k = 1,\ m = 0)$, $4a \to 4\,(m = 1)$, $6a \to 6$, $7a \to 7$.

Таблиця 1

№	$H(u)$	$F(u)$	Ліївська симетрія	Зауваження
1	$\forall$	$\forall$	$A = \langle \partial_0,\ \partial_a,\ J_{12} = x_1\partial_2 - x_2\partial_1 \rangle$	
2	$\forall$	0	$A + \langle D = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a \rangle$	
3	e^{ku}	λe^{mu}	$A + \langle D_1 = 2(m-k)x_0\partial_0 + m x_a\partial_a - 2\partial_u \rangle$	$m \neq k$
3a	e^u	$\lambda_0 e^u + \lambda$	$A + \langle D_4 = e^{\lambda_0 x_0}(\partial_0 + \lambda_0\partial_u) \rangle$	$\lambda \neq 0$
4	u^k	λu^m	$A + \langle D_2 = 2(m-k-1)x_0\partial_0 + (m-1)x_a\partial_a - 2u\partial_u \rangle$	$(k, m) \neq (0, 0)$, $m \neq k+1$
4a	u^k	$\lambda_0 u^{k+1} + \lambda u$	$A + \langle D_5 = e^{-\lambda_0 k x_0}(\partial_0 - \lambda_0 u\partial_u) \rangle$	$\lambda \neq 0$
5	1	$\lambda u \ln u$	$A + \langle e^{\lambda x_0}(\partial_a + \frac{\lambda}{2} x_a u\partial_u),\ e^{\lambda x_0} u\partial_u \rangle$	
6	u^k	0	$A + \langle D,\ D_3 = k x_a\partial_a - 2u\partial_u \rangle$	$k \neq 0$
6a	u^k	$\lambda_0 u^{k+1}$	$A + \langle D_3,\ D_5 \rangle$	$k \neq 0$
7	e^u	0	$\langle \partial_0,\ x_0\partial_0 + \partial_u,\ \xi^a(\vec{x})\partial_a - 2\xi^1_1\partial_u \rangle$	$\xi^1_2 + \xi^2_1 = 0$, $\xi^1_1 = \xi^2_2$
7a	e^u	$\lambda_0 e^u$	$A + \langle D_4,\ \xi^a(\vec{x})\partial_a - 2\xi^1_1\partial_u \rangle$	$\xi^1_2 + \xi^2_1 = 0$, $\xi^1_1 = \xi^2_2$

Тут $\lambda \neq 0, m, k$ — сталі, $\lambda \in \{-1; 1\} \bmod G^{\sim}$. У випадку 3 стала $k \in \{0; 1\} \bmod G^{\sim}$ та $m \in \{0; 1\} \bmod G^{\sim}$. У випадках 1 та 2, наведені алгебри є максимальними, якщо рівняння не є еквівалентним рівнянням, наведеним у випадках 3–7.

У цій роботі розв'язана задача: дослідити Q-умовну інваріантність даних нелінійних рівнянь теплопровідності відносно інволютивної множини двох операторів:

$$Q_a = A^a(x, u)\partial_0 + B^{ab}(x, u)\partial_b + C^a(x, u)\partial_u, \tag{7}$$

де A, B^a, C, A^a, B^{ab}, C^a — довільні гладкі функції, $a = 1, 2$.

Будь-який оператор ліївської інваріантності є також оператором Q-умовної інваріантності, з іншого боку, дослідження буде проводитися з погляду перетворень еквівалентності, тому ми шукаємо оператори Q-умовної інваріантності, які не є еквівалентними ліївським.

Функції H та F, при яких рівняння (2) зводяться локальною заміною до лінійного рівняння теплопровідності, також не розглядаємо, оскільки це рівняння досліджено в [5].

З точністю до еквівалентності множин операторів Q-умовної симетрії можливі три різні випадки :

1. Якщо координати операторів Q_a пропорційні, то множина (7) еквівалентна одному оператору (4);

2. Якщо $\triangle = \begin{vmatrix} B^{11} & B^{12} \\ B^{21} & B^{22} \end{vmatrix} \neq 0$, то множина (7) еквівалентна множині операторів вигляду
$$\vec{Q} = \vec{A}\partial_0 + \vec{\partial} + \vec{C}\partial_u, \tag{8}$$
де $\vec{A} = \vec{A}(x, u)$, $\vec{C} = \vec{C}(x, u)$ — довільні гладкі функції;

3. Якщо $\triangle = 0$, то множина (7) еквівалентна множині операторів
$$Q_1 = \partial_0 + C\partial_u, \quad Q_2 = B\partial_1 + \partial_2 + D\partial_u, \tag{9}$$
де $C = C(x,u)$, $B = B(x,u)$, $D = D(x,u)$ — довільні гладкі функції.

У цій роботі досліджена Q-умовна інваріантність рівняння (2) відносно інволютивної множини операторів вигляду (9).

II. Методи дослідження

У роботі використовується поняття інваріантності рівняння відносно операторів Q-умовної симетрії [12] та відносно інволютивних множин Q-умовних операторів [19]. Наведемо основні означення.

Означення 1 *[20]. Множина диференціальних операторів першого порядку*
$$Q_a = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ai}(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta_a(x,u)\frac{\partial}{\partial u}, \quad a = 1,\ldots,m, \tag{10}$$
називається інволютивною, якщо існують гладкі функції $\mu^c_{ab}(x,u)$, $a,b,c = 1,\ldots,m$, *такі, що* $[Q_a, Q_b] = \sum_{c=1}^{m} \mu^c_{ab}(x,u)Q_c$.

Означення 2 *[19]. Диференціальне рівняння з частинними похідними* S *є* Q*-умовно інваріантним відносно інволютивної множини диференціальних операторів (10), якщо*
$$\underset{r}{Q_a} S \Bigg|_{S=0,M} = 0,$$
де M *— множина всіх диференціальних наслідків рівнянь* $Q_a[u^b] = 0$, *порядок яких як диференціальних рівнянь не перевищує порядку рівняння* S.

Означення 3 *[19]. Множини диференціальних операторів першого порядку* $Q = \{Q_\alpha\}$ *та* $\tilde{Q} = \{\tilde{Q}_\alpha\}$ *називаються еквівалентними, якщо вони задовольняють умову* $\tilde{Q} = A(x,u)Q$, *де* $A(x,u)$ *— невироджена функціональна матриця.*

Означення 4 *[5]. Дві інволютивні множини називаються еквівалентними відносно групи перетворень, якщо існує перетворення з групи, що перетворює одну інволютивну множину в еквівалентну іншій.*

III. Інволютивні множини з двох операторів Q-умовної інваріантності

Дослідимо симетрію рівняння (2) відносно операторів (9). Справедливе твердження.

Теорема 3 *Рівняння (2) є* Q*-умовно інваріантним відносно операторів (9), якщо виконуються такі умови:*
$$B_0 + CB_u = 0, \;\; (B^2+1)B_{uu} = 2BB_u^2,$$
$$BC_1 + C_2 - D_0 = CD_u - C_uD;$$
$$(B^2+1)D_{uu} = 2BB_uD_u - 2(BB_{2u} - B_{1u}) + \\ + \tfrac{4BB_u}{B^2+1}(BB_2 - B_1);$$
$$C_{uu} = 0, \;\; C_{1u} = BC_{2u}, \;\; C\dot{F} - FC_u = \\ = C^2\dot{H} + C_0H + \triangle C + 2DC_{2u};$$
$$3(F - HC)B_u + \triangle B - \tfrac{2BB_aB_a}{B^2+1} = \\ = 2(D_2B_u - BD_{2u} + D_{1u}) + \\ + \tfrac{2D}{B^2+1}[2B(BB_{2u} - B_{1u}) - (B^2+1)B_{2u}] - \\ - \tfrac{2}{(B^2+1)^2}[2DBB_u - (B^2+1)D_u][2B(BB_2 - B_1) - \\ -(B^2+1)B_2];$$
$$D(\dot{F} - C\dot{H}) - D_uF - D_0H = \triangle D + 2DD_{2u} + \\ + D^2D_{uu} - [1ex] - \tfrac{2}{B^2+1}[D_1(B_2 + BB_1 + DB_u) + \\ + (BB_2 - B_1 + DBB_u)(D_2 + DD_u + CH - F)]. \tag{11}$$

Доведення. З рівностей $Q_au = 0$ випливає, що
$$u_0 = C, \;\; u_2 = D - Bu_1. \tag{12}$$
Якщо використати умови інваріантності, (12), диференціальні наслідки від (12), які не перевищують порядок рівняння (2), $u_{22} = F - Hu_0 - u_{11}$, формули продовження та взяти до уваги те, що функції $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$, H та F не залежать від похідних функції u, то одержимо рівності (11). Теорема 3 доведена.

У цій роботі розглянемо випадок, коли $D = 0$. Тоді система визначальних рівнянь (11) спрощується і стає можливим знайти її загальний розв'язок. Всі оператори класу (9) описуються множиною операторів
$$Q_1 = \partial_0 + C(x,u)\partial_u, \quad Q_2 = B(x,u)\partial_1 + \partial_2, \tag{13}$$
а визначальна система (11) набуває такого вигляду:
$$B_0{+}CB_u{=}0, \;\; BC_1{+}C_2{=}0, \;\; C_{uu} = 0, \;\; C_{1u} = BC_{2u};$$
$$B_{uu}(1+B^2) = 2BB_u^2, \;\; B_{1u} - BB_{2u} = \tfrac{2(B_1 - BB_2)BB_u}{B^2+1};$$
$$(B_1 - BB_2)(F - HC) = 0, \;\; \dot{F}C - FC_u = \\ = C^2\dot{H} + C_0H + \triangle C;$$
$$3B_u(F - HC) + \triangle B = \tfrac{2BB_aB_a}{B^2+1}. \tag{14}$$

Теорема 4 *Будь-яка множина двох операторів* Q*-умовної симетрії вигляду (13) нелінійного рівняння теплопровідності (2) або є еквівалентною множині операторів ліївської симетрії цього рівняння, або з точністю до перетворень групи еквівалентності (5) та додаткових перетворень (6) є еквівалентною одній з множин з табл. 2.*

Таблиця 2

№	$H(u)$	$F(u)$	Оператори	Зауваження
1	$\forall$	$\lambda_2 H$	$Q_1=\partial_0+\lambda_2\partial_u$, $Q_2=\operatorname{tg}[\lambda_3\omega+\beta(\vec{x})]\partial_1+\partial_2$	$\triangle\beta=0$ $\omega=u-\lambda_2 x_0$
2	$\forall$	$(\lambda_1 u+\lambda_2)H$	$Q_1=\partial_0+(\lambda_1 u+\lambda_2)\partial_u$, $Q_2=\operatorname{tg}[\lambda_3\omega+\beta(\vec{x})]\partial_1+\partial_2$	$\triangle\beta=0,\ \lambda_1\neq 0$ $\omega=(\lambda_1 u+\lambda_2)e^{-\lambda_1 x_0}$
3	$\forall$	$(\lambda_1 u+\lambda_2)(H+\lambda_0)$	$Q_1=\partial_0+(\lambda_1 u+\lambda_2)\partial_u$, $Q_2=(C_{ab}x_b+d_a)\partial_a$	$C_{ab}+C_{ba}=0,\ a=1,2$ $(\lambda_1,\lambda_2)\neq(0,0)$
4	u	$\lambda_2 u^2+\lambda_1 u+\lambda_0$	$Q_1=\partial_0+(\lambda_2 u+z(\omega))\partial_u$, $Q_2=C_{12}J_{12}+d_a\partial_a$	$(2C_{12}\omega+\vec{d}^{\,2})\ddot{z}+2C_{12}\dot{z}=$ $=\lambda_1 z-z^2-\lambda_2\lambda_0$, $\omega=\frac{C_{12}}{2}\vec{x}^{\,2}+\vec{d}^{\,\perp}\vec{x}$
5	u	λu	$Q_1=\partial_0+z(\omega)\partial_u$, $Q_2=d_a\partial_a$	$\dot{z}^2=C_1+\lambda z^2-\frac{2}{3}z^3$ $\omega=\vec{d}^{\,\perp}\vec{x},\ C_1\neq 0$
6	u	0	$Q_1=\partial_0-\wp(\omega)\partial_u$, $Q_2=d_a\partial_a$	$\ddot{\wp}=\wp^2,\ \omega=\vec{d}^{\,\perp}\vec{x}$ $\wp$ — функція Вейєрштрасса
7	u	u	$Q_1=(\operatorname{ch}\omega+1)\partial_0+3\partial_u$, $Q_2=d_a\partial_a$	$\omega=\vec{d}^{\,\perp}\vec{x}$
8	u	$-u$	$Q_1=(\cos\omega-1)\partial_0+3\partial_u$, $Q_2=d_a\partial_a$	$\omega=\vec{d}^{\,\perp}\vec{x}$

Тут λ, λ_0, λ_1, λ_2, C_1, C_{ab}, d_a, $d_a^{\perp}$ — довільні сталі, z — гладка функція, $\vec{d},\vec{d}^{\,\perp}$ — ортогональні вектори.

Доведення. З сьомого рівняння системи (14) одержуємо, що можливі два різні випадки: $F=CH$, $F\neq CH$. Розглянемо кожен з цих випадків окремо.

I. Нехай $F=CH$, а це означає, що $C=C(u)$. З третього рівняння системи (14) маємо $C=\lambda_1 u+\lambda_2$, де λ_1, λ_2 — довільні сталі. Тоді система (14) набуде вигляду:

$$\begin{aligned}&(\lambda_1 u+\lambda_2)\dot{F}-\lambda_1 F=(\lambda_1 u+\lambda_2)^2\dot{H},\\ &B_0+(\lambda_1 u+\lambda_2)B_u=0;\\ &B_{uu}(1+B^2)=2BB_u^2,\\ &B_{1u}-BB_{2u}=\tfrac{2(B_1-BB_2)BB_u}{B^2+1};\\ &\triangle B=\frac{2BB_aB_a}{B^2+1}.\end{aligned}\qquad(15)$$

При $F=(\lambda_1 u+\lambda_2)H$ перше рівняння системи (15) перетворюється в тотожність. Загальний розв'язок другого рівняння цієї системи залежно від значення сталої λ_1 має вигляд $B=B(\omega,\vec{x})$, де

$$\omega=u-\lambda_2 x_0,\qquad \text{при } \lambda_1=0;\qquad(16)$$

$$\omega=(\lambda_1 u+\lambda_2)e^{-\lambda_1 x_0},\qquad \text{при } \lambda_1\neq 0.\qquad(17)$$

Підставивши B в третє рівняння системи (15), отримаємо

$$B=\operatorname{tg}\alpha,\qquad \alpha=\gamma(\vec{x})\omega+\beta(\vec{x}),\qquad(18)$$

де γ, β — довільні гладкі функції, ω має вигляд (16) або (17). Після підстановки (18) в четверте та п'яте рівняння системи (15) отримаємо, що $\gamma=\lambda_3=\mathrm{const}$, $\triangle\beta=0$.

Формули (18), (16), (17) залежно від ω задають оператори з пунктів 1 та 2 табл. 2 (відповідно).

II. Нехай $B_1=BB_2$, тоді з шостого рівняння системи (14) отримаємо рівняння $B_2B_u=0$.

Якщо припустити, що $B_u\neq 0$, тоді $B_2{=}B_1{=}0$. З останнього рівняння системи (14) випливає, що $B_u(F-HC)=0$. Оскільки в цьому випадку $F{-}HC{\neq}0$ і $B_u{\neq}0$, то система (14) несумісна.

Отже, $B_u=0$, тоді з третього рівняння системи (14) отримаємо, що $C=y(x)u+z(x)$, де y, z — довільні гладкі функції. Диференціальний наслідок першого порядку по змінній u з другого рівняння разом з четвертим рівнянням системи (14) задають умову $y=y(x_0)$. Тоді з (14) випливає:

$$\begin{gathered}B_0=0,\ \ B_1=BB_2,\ \ Bz_1+z_2=0,\ \triangle B=2B_1B_2,\\ (yu+z)\dot{F}-yF=(yu+z)^2\dot{H}+(\dot{y}u+z_0)H+\triangle z.\end{gathered}\qquad(19)$$

З умов сумісності другого та четвертого рівнянь системи (19) одержимо умову $B_{22}=0$, тоді $B=\alpha(x_1)x_2+\beta(x_1)$, де α,β — довільні гладкі функції. Підставивши B в друге рівняння системи (19), отримаємо

$$B=\frac{C_{12}x_2+d_2}{-C_{12}x_1-d_1},\qquad(20)$$

де C_{12}, d_a — довільні сталі, $a=1,2$. Використання (20) дає змогу проінтегрувати третє рівняння системи (19):

$$z=z(x_0,\ \omega),\qquad \omega=\frac{1}{2}\,C_{12}\,\vec{x}^{\,2}+d_ax_a.\qquad(21)$$

Оскільки функції, що входять до останнього рівняння (19), залежать від різних невідомих, то, ввівши припущення

$$y = m_1\varphi(x),\ z = m_2\varphi(x),\ \dot y = m_3\varphi(x) + k_3\varphi^2(x),$$
$$z_0 = m_4\varphi(x) + k_4\varphi^2(x),\ \triangle z = m_5\varphi(x) + k_5\varphi^2(x), \quad (22)$$

де m_i, k_i — довільні сталі, а $\varphi(x)$ — довільна гладка функція, $i = \overline{1,5}$, отримаємо рівняння

$$(m_1u + m_2)\dot F - m_1F - (m_3u + m_4)H - m_5 =$$
$$= \varphi(x)[(m_1u + m_2)^2\dot H + (k_3u + k_4)H + k_5].$$

Це рівняння не залежить від змінної x в випадках $(y, z) = \mathrm{const}$ або $H = \mathrm{const}$. В протилежному випадку, після його розщеплення по функції $\varphi(x)$, одержимо систему двох диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned}&(m_1u + m_2)\dot F = m_1F + (m_3u + m_4)H + m_5,\\&(m_1u + m_2)^2\dot H + (k_3u + k_4)H + k_5 = 0.\end{aligned} \quad (23)$$

У результаті отримаємо такі істотно різні випадки:
$(y, z) = \mathrm{const}$; $H = \mathrm{const}$; $(y, z) \neq \mathrm{const}$, $H \neq \mathrm{const}$.
Розглянемо кожен з отриманих випадків окремо.

II.1. Нехай $(y, z) = (\lambda_1, \lambda_2) = \mathrm{const}$, тоді останнє рівняння системи (19) має вигляд $(\lambda_1u+\lambda_2)\dot F-\lambda_1F = (\lambda_1u + \lambda_2)^2\dot H$, яке інтегрується для довільнії функції H: $F = (\lambda_1u+\lambda_2)(H+\lambda_0)$, де λ_0 — стала інтегрування. Оператори (13) еквівалентні наступним операторам $Q_1 = \partial_0 + (\lambda_1u+\lambda_2)\partial_u$, $Q_2 = (C_{ab}x_b + d_a)\partial_a$, що відповідає пункту 3 табл. 2.6.

II.2. Нехай $H = \mathrm{const}$, не втрачаючи загальності, вважатимемо $H = 1$. Останнє рівняння системи (19) має вигляд

$$(yu + z)\dot F - yF = \dot yu + z_0 + \triangle z.$$

Проаналізувавши його структуру відносно змінної u, отримаємо два різні випадки: а) F — довільна гладка функція, $y = z = 0$, $Q_1 = \partial_0$, $Q_2 = C_{ab}x_b + d_a\partial_a$ та б) $F = \lambda u \ln u$, $z = 0, y = C_1e^{\lambda x_0}$, $Q_1 = \partial_0 + C_1e^{\lambda x_0}\partial_u, Q_2 = C_{ab}x_b + d_a\partial_a$. Знайдені оператори — це лінійна комбінація тільки ліївських операторів.

II.3. Нехай $H \neq \mathrm{const}$, $(y, z) \neq \mathrm{const}$. Проаналізувавши структуру другого рівняння системи (23) відносно змінної u, отримаємо такі пари функцій:

$$H = e^u + \lambda_1, \qquad F = \lambda_2e^u + \lambda_3u + \lambda_4; \quad (24)$$

$$H = \lambda u^m, \qquad F = \lambda u, \qquad m \neq 0, 1; \quad (25)$$

$$H = u, \qquad F = \lambda_1u^2 + \lambda_2u + \lambda_3. \quad (26)$$

Розглянемо кожну пару функцій окремо.

II.3.1. Підставивши функції (24), (21) в останнє рівняння системи (19) та розщепивши по степенях змінної u, отримаємо рівняння $y = 0$, $z_0 + z^2 = \lambda_2z$ та $\lambda_1z_0 + (2C_{12}\omega + (\vec d\,)^2)z_{\omega\omega} + 2C_{12}z_\omega = \lambda_3z$. Проінтегрувавши друге рівняння, знайдемо $z = \lambda_2(1 + \beta(\omega)e^{\lambda_2x_0})^{-1}$, де β — довільна гладка функція. Підставивши z в третє рівняння, отримаємо умови $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, $\dot\beta = 0$, які разом з (24) задають рівняння $e^uu_0 + \triangle u = \lambda_2e^u + \lambda_4$, що перетвореннями (5) і (6) зводиться до рівняння $e^uu_0 + \triangle u = \lambda_4$. Отримані оператори з точністю до (5), (6) породжують лінійну комбінацію тільки ліївських операторів.

II.3.2. Підставивши функції (25), (21) в останнє рівняння системи (19), отримаємо

$$\begin{aligned}&\lambda z = m(yu + z)^2u^{m-1} + (\dot yu + z_0)u^m+\\&+(2C_{12}\omega + (\vec d\,)^2)z_{\omega\omega} + 2C_{12}z_\omega.\end{aligned} \quad (27)$$

При розщепленні рівняння (27) по степенях змінної u виникають особливі степені $m = -1$ та $m = 1$.

Нехай $H = \lambda u^{-1}$. Тоді з рівняння (27) маємо $z = 0$, $y = -(x_0 + d_0)^{-1}$,
де d_0 — довільна стала. Підставивши z та y в (13), отримаємо оператори, які з точністю до перетворень (5), (6) еквівалентні ліївським операторам $Q_1 = (x_0 + d_0)\partial_0 - \partial_u$, $Q_2 = (C_{ab}x_b + d_b)\partial_a$.

Нехай $H = \lambda u$. Тоді з рівняння (27) отримаємо

$$\begin{aligned}&\dot y + y^2 = 0,\ z_0 + 2yz = 0,\\&\lambda z = z^2 + (2C_{12}\omega + (\vec d\,)^2)z_{\omega\omega} + 2C_{12}z_\omega.\end{aligned} \quad (28)$$

Розв'язком першого рівняння системи рівнянь (28) є $y = 0$ або $y = (x_0 + d_0)^{-1}$.

При $y = 0$ з (28) випливає, що $z_0 = 0$, а також

$$\left(2C_{12}\omega + (\vec d\,)^2\right)\ddot z + 2C_{12}\dot z = \lambda z - z^2. \quad (29)$$

Залежно від співвідношень між коефіцієнтами C_{12} та d_a інтегрування рівняння (29) зводиться до інтегрування рівнянь

$$\begin{aligned}&2C_{12}(\omega\ddot z + \dot z) = \lambda z - z^2, && \text{при } C_{12} \neq 0,\ \vec d\ = 0;\\&(\vec d\,)^2\ddot z = \lambda z - z^2, && \text{при } C_{12} = 0,\ (\vec d\,)^2 \neq 0.\end{aligned} \quad (30)$$

Розв'язки рівнянь (30) задають Q-умовні оператори інваріантності рівняння (2), які наведено в табл. 2.6 в пунктах 4–8.

Коли $y = (x_0 + d_0)^{-1}$, з другого рівняння системи (28) отримаємо $z = \beta(\omega)(x_0 + d_0)^{-2}$, де β — довільна гладка функція. Підставивши z в третє рівняння системи (28), одержимо, що $\beta = 0$. Це означає, що $z = 0$ і оператори (13) є еквівалентні ліївським, які наведено в табл. 2.1 в пункті 6.

Нехай $H = \lambda u^m$, $m \neq 0, \pm1$. Тоді з рівняння (27) знаходимо $z = 0$, $y = (mx_0+d_0)^{-1}$, де d_0 — довільна стала, підставивши які в (13), отримаємо оператори що еквівалентні ліївським
$Q_1 = (mx_0 + d_0)\partial_0 + \partial_u$, $Q_2 = (C_{ab}x_b + d_b)\partial_a$.

II.3.3. Підставивши функції (26), (21) в останнє рівняння системи (19) та розщепивши по степенях змінної u, отримуємо

$$\dot y + (y - \lambda_1)y = 0,\ z_0 + 2(y - \lambda_1)z = 0, \quad (31)$$

$$(2C_{12}\omega + (\vec d\,)^2)z_{\omega\omega} + 2C_{12}z_\omega + z^2 + \lambda_3y = \lambda_2z. \quad (32)$$

Якщо $y = \mathrm{const}$, то з (31) отримуємо, що $y = \lambda_1$, $z_0 = 0$, при цьому функція $z = z(\omega)$ повинна задовольняти таке звичайне диференціальне рівняння $\left(2C_{12}\omega + (\vec d\,)^2\right)z_{\omega\omega} + 2C_{12}z_\omega + z^2 + \lambda_3\lambda_1 = \lambda_2z$.

Розв'язки якого після підстановки в (13), задають оператори, наведені в пункті 4 табл. 2.

Припустимо, що $y \neq \mathrm{const}$. Якщо додати перше рівняння (31), домножене на $2z$, та друге рівняння (31), домножене на $-y$, то, після інтегрування по змінній x_0, отримаємо $z = \beta(\omega)y^2$. Підставивши z в (32) та розділивши змінні, отримаємо $z = \mathrm{const}$ та $y = \mathrm{const}$, що протирічить нашому припущенню. Теорема 4 доведена.

IV. Висновки

У роботі розв'язано задачу знаходження інволютивних множин Q-умовних операторів інваріантності (1+2)-вимірного рівняння теплопровідності. Докладно описано множини двох операторів (13) Q-умовної інваріантності рівняння (2). Результати розв'язання наведено в табл. 2.

Література

[1] Дородницын В.А. О инвариантных решениях нелинейного уравнения теплопроводности с источником // Журн. выч. мат. и мат. физ. – 1982. – Т. 22. – С. 1393–1400.

[2] Дородницын В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в дву- и трехмерном случаях // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19. – С. 1215–1223.

[3] Ічанська Н.В. Q - умовна інваріантність нелінійних (1+2) - вимірних рівнянь реакції - дифузії // Математичний вісник Наукового товариства ім. Шевченка, т.7, 2010. – С. 45–74.

[4] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // ДАН СССР. – 1959. – Т. 125, № 3. – С. 492–495.

[5] Попович Р.О., Корнєва І.П. Про Q-умовну симетрію лінійного n-вимірного рівняння теплопровідності // Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці: Зб. наук. пр. НАН України. Інститут математики. – 1998. – Т. 19. – С. 200–211.

[6] Серов Н.И. Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения теплопроводности. // УМЖ. – 1990. – Т. 42, № 10. – С. 1370–1376.

[7] Серова М.М. О нелинейных уравнениях теплопроводности, инвариантных относительно группы Галилея // Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики. – Киев: Ин-т математики. – 1985. – С. 119–123.

[8] Фущич В.И., Серов Н.И. Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. – 1990. – Сер. А, № 7. – С. 24–27.

[9] Фущич В.И., Серов Н.И., Амеров Т.К. О нелокальных анзацах для одного нелинейного одномерного уравнения теплопроводности// Доклады АН Украины. – 1992. – № 1. – С. 26–30.

[10] Фущич В.И., Серов Н.И., Амеров Т.К. Условная инвариантность нелинейного уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. – 1990. – № 11. – С. 15–18.

[11] Фущич В.И., Серов Н.И., Чопик В.И. Условная инвариантность и нелинейные уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. – 1988. – Сер. А, № 9. – С. 17–20.

[12] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики.– Киев: Наукова думка. – 1989. – 339 с.

[13] Bluman G.W., Cole J.D. The general similarity solution of the heat equation // J. Math. Mech. – 1969. – Vol. 18, № 11. – P. 1025–1042.

[14] Fushchish W.I., Serov N.I., Shtelen W.M. and Popovich R.E. Q-conditional symmetry of the linear heat equation // Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy. – 1992. – № 12. – P. 27–32.

[15] Fushchich W.I., Serov N.I. and Tulupova L.A. The Conditional Invariance and Exact Solutions of the Nonlinear Diffusion Equation.// Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy. – 1993. – № 4. – P. 37–40.

[16] Ibragimov N.H. (Editor) Lie group analysis of differential equations – symmetries, exact solutions and conservation laws // Boca Raton, FL, Chemical Rubber Company. – 1994. – Vol. 1.

[17] Popovych R.O. On reduction and Q-conditional symmetry // Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Phisics". – Kyiv: Institute of Mathematics. – 1997. – Vol. 2. – P. 437–443.

[18] Popovych R.O. Equivalence of Q-conditional symmetries under group of local transformation // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2000. – Vol. 30, Part 1. – P. 184–189.

[19] Popovych R.O. Equivalence of Q-conditional symmetries under group of local transformation // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2000. – Vol. 30, Part 1. – P. 184–189.

[20] Zhdanov R.Z., Tsyfra I.M., and Popovych R.O. A precise definition of reduction of partial differential equations // J. Math. Anal. Appl. – 1999. – Vol. 238, № 1. – P. 101–123.

ИНВОЛЮТИВНЫЕ МНОЖЕСТВА С ДВУХ ОПЕРАТОРОВ Q-УСЛОВНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Н.И. Серов, Н.В. Ичанская

Полтавский национальный технический университет им. Юрия Кондратюка, Первомайский проспект 24, Полтава, Украина

Найдены в явном виде широкие классы инволютивных множеств двух операторов относительно которых нелинейное (1+2)-мерное уравнение теплопроводности есть Q-условно инвариантным.

Ключевые слова: нелинейные уравнения, алгебра Ли, оператор симметрии, точные решения.

2000 MSC: 58J70, 35A30

УДК: 517.945:519.46

INVOLUTE SETS CONSISTING OF TWO OPERATORS Q-CONDITIONAL SYMMETRY OF THE NONLINEAR HEAT EQUATIONS

M.I. Serov, N.V. Ichans'ka

Poltava Technical University, 24 Pershotravnevyi Ave., Poltava, Ukraine

Q-conditional symmetry of nonlinear heat equations with respect to an involute sets consisting of two operators are investigated. The new involute sets consisting of two operators Q-conditional symmetry of equations of this class are found.

Key words: nonlinear equations, Lie algebras, symmetry operator, exact solution.

2000 MSC: 58J70, 35A30

УДК: 517.945:519.46