ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.718 № 718, (2011) с. 78–80

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.718 No 718, (2011) 78–80

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНИХ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ, ЗВ'ЯЗАНИХ З ОПЕРАТОРОМ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

О.В. Лопотко

Національний лісотехнічний університет України,
вул. Генерала Чупринки, 103, 79057, Львів, Україна

(Отримано 4 травня 2011 р.)

Доведено теорему про інтегральне зображення для неперервної функції $k(x) \in C^1\left(x \in R^1\right)$ такої, що ядро $K(x;y) = \frac{a(x+y)}{a(x)a(y)} k(x+y)$ $\left(a(x) = \exp\left[\int\limits_0^x p(x)\,dx\right]\right.$, $p(x)$ – неперервна функція) додатно визначено. Ця теорема є узагальненням теореми про інтегральне зображення експоненціально випуклих функцій.

Ключові слова: інтегральне зображення, додатно визначені функції.

2000 MSC: 34860

УДК: 517.9

У роботі [1] запропоновано метод одержання інтегральних зображень для додатно визначених ядер $K(x,y)$ $\left(x, y \in R^1\right)$ з використанням власних функцій диференціальних операторів, як в звичайних, так і частинних похідних. Застосовуючи цей метод, у монографії [2] доведено теорему про інтегральне зображення таких ядер

$$K(x;y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=0}^{z-1} \chi_j(x;\lambda)\, \overline{\chi_k(y;\lambda)} d\sigma_{jk}(\lambda)$$

через фундаментальну систему розв'язків $\chi_0(x,\lambda)$, $\chi_1(x,\lambda), \ldots, \chi_{r-1}(x,\lambda)$ диференціального рівняння $Lu = \lambda u$. Одержано інтегральні зображення для ядер типу $k(y-x)$, $\frac{1}{2}\left[k(x+y) \pm k(x-y)\right]$, $k(x+y)$, пов'язаних з диференціальними операторами $\frac{d}{dx}$; $-\frac{d^2}{dx^2}$; $i\,\frac{d}{dx}$.

У статті доведено теорему про інтегральне зображення додатно визначених ядер пов'язаних з диференціальним оператором $L = \frac{d}{dx} + p(x)$, де $p(x)$ – неперервна функція.

Інтегральне означення додатно визначеної функції.

Означення. Неперервну функцію $k(x) \in C^1\left(x \in R^1\right)$ називатимемо додатно визначеною, якщо виконується нерівність

$$\int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} K(x;y)\; u(y)\; \overline{u(x)}\, dxdy \geq 0, \;\left(u \in C_0^{\infty}\left(R^1\right)\right), \tag{1}$$

де $K(x;y) = \frac{a(x+y)}{a(x)\,a(y)} k(x+y)$, а $a(x) = \exp\left[\int\limits_0^x p(x)\,dx\right]$.

Теорема. *Для того, щоб ядро* $K(x;y) = \frac{a(x+y)}{a(x)\,a(y)} k(x+y)$ *було додатно визначеним необхідно і достатньо, щоб функція* $k(x) \in C^1\left(x \in R^1\right)$ *мала таке зображення:*

$$k(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi_0(x,\lambda)\, d\sigma(\lambda) \;\left(x \in R^1\right), \tag{2}$$

де $d\sigma(\lambda)$ *– невід'ємна скінченна міра;* $\chi_0(x,\lambda)$ *– розв'язок рівняння* $Lu = \lambda u$, *який задовольняє умову* $\chi_0(0,\lambda) = 1$.

Необхідність. Нехай ядро $K(x,y)$ додатно визначено. Легко перевірити, що для нього виконується співвідношення

$$L_x\left[K(x,y)\right] = L_y\left[K(x,y)\right]. \tag{3}$$

Тому, згідно з теоремою 3.7 [2, гл.VIII] для ядра $K(x,y)$ можна написати таке інтегральне зображення:

$$K(x,y) = \int\limits_{R^1} \chi_0(x,\lambda)\, \chi_0(y,\lambda)\, d\sigma(\lambda), \tag{4}$$

де $\chi_0(x,\lambda)$ – розв'язок рівняння $Lu = \lambda u$, який задовольняє умову $\chi_0(0,\lambda) = 1$, $d\sigma(\lambda)$ – невід'ємна скінченна міра.

Прийнявши у (4) $y = 0$, одержимо (2).

Необхідність доведено.

Достатність. Маємо інтегральне зображення (2) і ядро $K(x;y) = \frac{a(x+y)}{a(x)\,a(y)} k(x+y)$. Покажемо, що це ядро додатно визначено. Для цього спочатку введемо оператор загального зсуву. Нехай $f(x) \in \in C^1\left(R^1\right)$, позначимо через $u(x;y)$ розв'язок задачі Коші

$$\frac{\partial u}{\partial x} + p(x)\,u = \frac{\partial u}{\partial y} + p(y)\,u, \tag{5}$$

$$u(x,0) = f(x). \tag{6}$$

Задачу (5) – (6) можна звести, з використанням функції $a(x) = \exp\left[\int\limits_0^x p(x)\,dx\right]$, до задачі Коші

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{7}$$

$$u(x,0) = a(x)\,f(x), \tag{8}$$

де $\nu(x,y) = a(x)\,a(y)\,u(x,y)$.

Оскільки розв'язок задачі (7) – (8) має вигляд

$$V(x,y) = a(x+y)\,f(x+y),$$

розв'язок задачі (5) – (6) матиме такий вигляд:

$$U(x,y) = \frac{a(x+y)}{a(x)\,a(y)} f(x+y). \tag{9}$$

Введемо такий оператор T_y зсуву, прийнявши

$$(T_y f)(x) = U(x,y), \ \left(x, y \in R^1\right) \tag{10}$$

Застосовуючи до обидвох частин інтегрального зображення (2) оператор T_y, одержимо

$$(T_y k)(x) = \int\limits_{R^1} T_y \chi_o(x,\lambda)\,d\sigma(\lambda). \tag{11}$$

Тут $(T_y;k)(x) = \dfrac{a(x+y)}{a(x)\,a(y)} k(x+y)$,

$$T_y \chi_0(x;\lambda) = \frac{a(x+y)}{a(x)\,a(y)} \chi_0(x+y;\lambda) =$$

$$= \frac{a(x+y)}{a(x)\,a(y)} \cdot e^{\lambda(x+y) - \int\limits_0^{x+y} p(x+y)d(x+y)} =$$

$$= \frac{e^{\lambda(x+y)}}{a(x)\,a(y)} = \chi_0(x;\lambda)\,\chi_0(y;\lambda),$$

оскільки $\chi_0(x;\lambda) = e^{\lambda x - \int\limits_0^x p(x)dx}$ розв'язок рівняння $\dfrac{du}{dx} + p(x)\,u = \lambda u$.

Рівність (11), з врахуванням цих перетворень, набуде вигляду

$$\frac{a(x+y)}{a(x)\,a(y)} k(x+y) = \int\limits_{R^1} \chi_o(x,\lambda)\,\chi_0(y,\lambda)\,d\sigma(\lambda). \tag{12}$$

Умова (1) перевіряється з використанням рівності (12).

Теорему доведено.

Висновки

Доведена теорема дозволяє розширити клас додатно визначених ядер, що були досліджені раніше. Можна розглянути додатно визначені функції двох змінних, пов'язані з оператором $\dfrac{d}{dx_j} + p(x_j)$ $(j = 1, 2)$. У гармонічному аналізі можна використати цю теорему для дослідження операторів узагальненого зсуву.

Література

[1] Березанский Ю.М. Обобщение теоремы Бохнера на разложения по собственным функциям дифференциальных операторов // ДАНСССР, т. 108, № 3,1965. – С.893–896.

[2] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наукова думка, 1965. – 798 с.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ, СВЯЗАННЫХ С ОПЕРАТОРОМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

О.В. Лопотко

Национальный лесотехнический университет Украины,
ул. Генерала Чупринки, 103, 79057, Львов, Украина

Доказана теорема об интегральном представлении для непрерывной функции $k(x) \in \in C^1 \left(x \in R^1\right)$ такой, что ядро $K(x;y) = \frac{a(x+y)}{a(x)a(y)} k(x+y)$ $\left(a(x) = \exp\left[\int\limits_0^x p(x)\,dx\right],\ p(x)\right.$ – непрерывная функция) положительно определено. Данная теорема есть обобщением теоремы об интегральном представлении экспоненциально выпуклых функций.

Ключевые слова: интегральное представление, положительно определенные функции.

2000 MSC: 34860

УДК: 517.9

THE INTEGRAL REPRESENTATION OF POSITIVELY DEFINITE FUNCTIONS OF ONE VARIABLE ASSOCIATED WITH FIRST ORDER OPERATOR

O.V. Lopotko

National Univesity Forest of Lviv
103 General Tchuprunka Str., Lviv, 79057, Ukraine

Integral representation is obtained for continuous function $k(x) \in C^1 \left(x \in R^1\right)$ such that kernel $K(x;y) = = \frac{a(x+y)}{a(x)a(y)} k(x+y)$ $\left(a(x) = \exp\left[\int\limits_0^x p(x)\,dx\right],\ p(x)\right.$ is continuns function) is positively definite. This theorem generalizes the theorem about integral representation of exponential convex functions.

Key words: integral representation, positive defined function.

2000 MSC: 34860

УДК: 517.9