

Ю. В. Климаш, М. В. Кайдан, Б. М. Стрихалюк  
 Національний університет “Львівська політехніка”,  
 кафедра телекомунікації

## МОДЕЛЬ ВИЗНАЧЕННЯ МЕТРИЧНОГО ТЕНЗОРА ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНОЇ МЕРЕЖІ НА ОСНОВІ КРИВОЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ КООРДИНАТ

© Климаш Ю. В., Кайдан М. В., Стрихалюк Б. М., 2017

Визначено метричний тензор, символи Крістофеля, тензори Рімана, Річі, скаляр кривизни простору для різних просторів. Наведено приклад визначення метричного тензору на основі теореми косинусів. Вперше визначено компоненту метричного тензора векторів з використанням теореми косинусів для чотирикутника з врахуванням двостороннього зв'язку між кожною парою вузлів. Запропоновано збільшити кількість компонент метричного тензора, що дасть змогу представити метрику у симетричному тензорному полі для опису деформації ріманової метрики, яку застосовують у потоках Річі.

Ключові слова: метричний тензор, система координат, стан мережі, потоки Річі, гіперболічний простір.

Yu. V. Klymash, M. V. Kaidan, B. M. Strykhalyuk  
 Lviv Polytechnic National University,  
 Department of Telecommunications

## METRIC TENSOR DEFINITION MODEL FOR TELECOMMUNICATION NETWORK BASED ON CURVILINEAR COORDINATES SYSTEMS

© Klymash Yu. V., Kaidan M.V., Strykhalyuk B. M., 2017

The tensor representation of telecommunication network parameters for various coordinate systems is described. The number of two-way links between nodes at the virtual level of the network is determined. A multidimensional coordinate system, the components of which may be various network parameters, such as the load between nodes, is considered. The state of the network is represented in a covariant and contravariant coordinate system. For assisted covariant differentiation described the possibility of taking into account changes in the state based on the Christoffel symbols. The definition of Riemann tensors is made. On the basis of the curvature tensor, the Ricci tensor is obtained by holding a convolution in a pair of indices, for example, in the first and third indices. In addition, another convolution was made on the Ricci tensor, which led to a scalar, which is called scalar curvature of space.

The definition of the metric tensor for Euclidean and hyperbolic space is considered. To represent hyperbolic space, it is suggested to use a Poincare disk, which is a canonical unit disk. The description of the Möbius transformation, which is used to display the virtual coordinates on a Poincare disk, is given.

An example of a metric tensor determination based on the cosine theorem is described for two cases: 1) when there is a common point for two vectors; 2) when there is no such point.

An increase in the number of components of a metric tensor has been proposed, which allows us to represent a metric in a symmetric tensor field for describing the deformation of the Riemann metric used in the Ricci flows.

For a network of four nodes, for the first time, the component of the metric vectors tensor was determined using the cosine of the quadrangle, taking into account the two-way connection between each pair of nodes.

The case where the load between the nodes is described by means of the exponential distribution law is considered. The component of the metric tensor for such a case and the differential of this component for the Ricci stream are determined.

**Key words:** the metric tensor, coordinate system, network conditions, Ricci flows, the hyperbolic space.

### Вступ

Через постійне збільшення обсягів інформаційних потоків та кількості віртуальних вузлів у Cloud встановити найоптимальніший маршрут між вузлом-джерелом і вузлом-отримувачем складно. Показниками для визначення такого маршруту можуть бути навантаження, час передавання даних, пропускна здатність тощо. В більшості випадків маршрутизація розглядається в евклідовому просторі, наприклад, у [1], математичний апарат цього простору описано в [2]. Випадки перевантаження каналів зв'язку, помилкове налаштування елементів мережі тощо утворюють структурні неоднорідності, внаслідок чого не встановлюється необхідний маршрут, тому процес передавання даних ускладнюється. Для уникнення такої ситуації в статтях [3–5] пропонується використання гіперболічного простору, який дає змогу деформувати грані неоднорідностей мережі до допустимої кривизни, внаслідок чого досягають успішної маршрутизації потоків. Для переходу з евклідового простору в гіперболічний і навпаки використовують потоки Річчі, що здійснюють деформацію метрики Рімана зі збереженням властивостей мережі [6–9]. Для реалізації цього необхідно отримати метричний тензор, за допомогою якого можна визначити такі важливі параметри, як символ Крістофеля, тензори Рімана, Річчі, скаляр кривизни простору. У статті [10] розглянуть лінійний простір з несиметричною метрикою, проте в потоках Річчі використано симетричний метричний тензор. Отже, актуальним завданням є опис моделі визначення метричного тензора, що використовується в потоках Річчі, для телекомунікаційної мережі.

### Тензорне представлення параметрів телекомунікаційних мереж для різних систем координат

Розглянемо  $n$ -вимірну систему координат. Нехай компонентами такої системи є різні параметри мережі, наприклад, навантаження між вузлами. Кількість двосторонніх зв'язків між вузлами на віртуальному рівні мережі визначається як  $n_{\max} = m(m-1)$ , де  $m$  – кількість вузлів. У випадку відсутності навантаження на деяких зв'язках між вузлами позначимо їх як  $w$ , система складатиметься з  $n = n_{\max} - w$  координат.

Центр системи координат  $O$  відповідає стану мережі, коли  $w = n_{\max}$ .

Введемо поняття радіус-вектор  $\mathbf{r}$ , який з'єднує початок системи координат  $O$  з точкою, що відповідає стану мережі:

$$\mathbf{r} = x^i \cdot \mathbf{e}_i = x_i \cdot \mathbf{e}^i, \quad (1)$$

де  $x_i$  та  $x^i$  – коваріантні та контрваріантні компоненти відповідно;  $\mathbf{e}_i$  та  $\mathbf{e}^i$  – коваріантні та контрваріантні орти, що зв'язані між собою співвідношенням:

$$\mathbf{e}^k \mathbf{e}_m = \delta_m^k, \quad (2)$$

де  $\delta$  – символ (тензор) Кронекера.

Зв'язок між коваріантними та контрваріантними компонентами відбувається з використанням таких формул:

$$x^i = g^{ij} \cdot x_j; \quad x_i = g_{ij} \cdot x^j, \quad (3)$$

де  $g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j$  – метричний контрваріантний тензор;  $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$  – метричний коваріантний тензор.

Стан мережі можна представити одночасно в коваріантній і контрваріантній системі координат у квадратичній формі з врахуванням (1) та (2) у вигляді:

$$\mathbf{r}^2 = x^i \cdot x_i = g_{ij} \cdot x^i \cdot x^j = g^{ij} \cdot x_i \cdot x_j. \quad (4)$$

Зміна навантаження між вузлами відбувається систематично, а отже, спостерігається зміна стану мережі, яку з врахуванням (3) можна представити як:

$$(d\mathbf{r}^{\mathbf{I}})^2 = dx^i \cdot dx_j = g_{ij} \cdot dx^i \cdot dx^j = g^{ij} \cdot dx_i \cdot dx_j. \quad (5)$$

Необхідно зазначити, що  $\mathbf{e}_i^{\mathbf{I}}$  та  $\mathbf{e}^{\mathbf{I}}$  також постійно змінюються, і це можна представити як:

$$\mathbf{e}_i^{\mathbf{I}} = \frac{\partial \mathbf{r}^{\mathbf{I}}}{\partial x^i} = \partial_i \mathbf{r}^{\mathbf{I}}; \quad \mathbf{e}^{\mathbf{I}} = \frac{\partial \mathbf{r}^{\mathbf{I}}}{\partial x_i} = \partial^i \mathbf{r}^{\mathbf{I}}. \quad (6)$$

За зміни навантаження відбувається його перерозподіл у каналах, що описується коефіцієнтом зв'язності (символом Крістофеля) першого  $\Gamma_{ij}^k$  та другого  $\Gamma_{k,ij}$  роду, які в загальному випадку записуються як.

$$\Gamma_{ij}^k = \mathbf{e}^{\mathbf{I}k} \partial_i \mathbf{e}_j^{\mathbf{I}}; \quad \Gamma_{k,ij} = \mathbf{e}_k^{\mathbf{I}} \partial_j \mathbf{e}_i^{\mathbf{I}}. \quad (7)$$

Оскільки наш простір є викривлений, то доцільно розглядати коваріантне диференціювання:

$$D\mathbf{r}^{\mathbf{I}} = \partial_k \mathbf{r}^{\mathbf{I}} dx^k = \mathbf{e}_j^{\mathbf{I}} (\partial_k x^j + x^i \Gamma_{ik}^j) dx^k = \mathbf{e}_j^{\mathbf{I}} (D_k x^j) dx^k = \mathbf{e}_j^{\mathbf{I}} D_k x^j, \quad (8)$$

де  $D_k x^j$  – коваріантний диференціал;  $D_k x^j$  – коваріантна похідна, яка для  $x^j$  і  $x_j$  матиме такий вигляд:

$$D_k x^j = \partial_k x^j + x^i \Gamma_{ik}^j; \quad D_k x_j = \partial_k x_j - x_i \Gamma_{ik}^j. \quad (9)$$

Зміна радіуса-вектора від послідовності змін стану мережі визначається як:

$$(D_m D_k - D_k D_m) x^i dx^k dx^m \mathbf{e}_i^{\mathbf{I}} = R_{j,mk}^i x^j dx^k dx^m \mathbf{e}_i^{\mathbf{I}}, \quad (10)$$

де  $R_{j,mk}^i$  – тензор Рімана або тензор кривизни, який визначають за допомогою символів Крістофеля:

$$R_{j,mk}^i = \partial_m \Gamma_{jk}^i - \partial_k \Gamma_{jm}^i + \Gamma_{pm}^i \Gamma_{jk}^p - \Gamma_{pk}^i \Gamma_{jm}^p. \quad (11)$$

У (9) враховано, що:

$$(D_m D_k - D_k D_m) x^i = R_{j,mk}^i x^j. \quad (12)$$

Тензор кривизни  $R_{j,mk}^i$  можна згорнути за парою індексів, отримавши тензор другого рангу, наприклад, за першим і третім індексом. Внаслідок цього отримуємо тензор Річчі:

$$R_{jk} = R_{j,ik}^i = \partial_i \Gamma_{jk}^i - \partial_k \Gamma_{ji}^i + \Gamma_{pi}^i \Gamma_{jk}^p - \Gamma_{pk}^i \Gamma_{ji}^p. \quad (13)$$

Ще одна згортка цього тензора призводить до скаляру, який називається скалярною кривизною простору:

$$R = g^{jk} R_{jk}. \quad (14)$$

Враховуючи (12), зміну симетричного метричного тензора в ріманівській геометрії можна визначити за допомогою потоку Річчі:

$$\frac{dg_{ij}}{dt} = -2R_{ij}. \quad (15)$$

### Визначення метричного тензора для різних просторів

Розглянемо деякі варіанти визначення метричного тензора. Зазначимо, що компоненти метричного тензора визначено за формулою:

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i^{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{e}_j^{\mathbf{I}} = \cos q_g, \quad (16)$$

де  $q_g$  – кут між  $\mathbf{e}_i^{\mathbf{I}}$  і  $\mathbf{e}_j^{\mathbf{I}}$ .

Для геометрії Рімана кут між  $x_i$  і  $x_j$  визначено за допомогою  $g_{ij}$ :

$$\cos q_g = \frac{\langle x_i, x_j \rangle_g}{\sqrt{\langle x_i, x_i \rangle_g \langle x_j, x_j \rangle_g}}. \quad (16)$$

В евклідовому просторі для визначення  $\cos q_g$  використаємо теорему косинусів:

$$x'^2 = x_i^2 + x_j^2 + 2x_i x_j \cos q_g, \quad (17)$$

звідки знаходимо:

$$\cos q_g = \frac{x_i^2 + x_j^2 - x'^2}{2x_i x_j}. \quad (18)$$

Для представлення гіперболічного простору пропонується використовувати диск Пуанкаре, який являє собою одиничний диск на комплексній площині  $|z| < 1$ ,  $z = x + iy$ , з ріманівською метрикою  $ds^2 = \frac{4dzd\bar{z}}{(1 - z\bar{z})^2}$ .

Для здійснення повороту в гіперболічному просторі використовуємо перетворення Мебіуса:  $z \rightarrow \exp^{iq} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}z_0}$ .

У цьому випадку кути між ортами (компоненти метричного тензора) визначаються дискретною метрикою за законом гіперболічного косинуса:

$$\cos q_g = \frac{\cosh x' - \cosh x_i \cosh x_j}{\sinh x_i \sinh x_j}. \quad (19)$$

Модель диска Пуанкаре використовують для обчислення відстаней у гіперболічному просторі. Нехай поверхня  $s$  представлена множиною точок, що задовольняють нерівність  $\sum_{i=1}^n x_i < 1$ , де  $x_i$  – координата, а  $n$  – розмірність. Тоді метрика Рімана виглядає як:

$$ds^2 = \frac{4 \sum_i^n x_i^2}{(1 - \sum_i^n x_i^2)^2}. \quad (20)$$

Нехай  $z_w$  та  $z_x$  є двома точками диска Пуанкаре, відповідно геодезика проходить через  $z_y$  та  $z_z$  і перетинає одиничне коло в точках  $z_w$  та  $z_x$ , де  $z_w$  знаходиться ближче до  $z_y$ , а  $z_x$  до  $z_z$ . Тоді гіперболічна відстань між  $z_w$  та  $z_x$  виражається як:

$$d(z_w, z_x) = \left( \ln \frac{(z_w - z_y)(z_x - z_z)}{(z_x - z_y)(z_w - z_z)} \right)^{-1}. \quad (21)$$

Відповідно опишемо перетворення Мебіуса для диска Пуанкаре у вигляді зсуву:

$$F_c(z) = c + \frac{r^2}{\bar{z} + \bar{c}}, \quad (22)$$

де  $c$  та  $r$  є відповідно центром та радіусом кола  $C$ .

Тобто мережну топологію можна відобразити на канонічному одиничному диску з круглими отворами, де вузли трансформуються до вигляду віртуальних координат.

### Приклад визначення метричного тензора на основі теореми косинусів

Розглянемо визначення метричного тензору, використовуючи теорему косинусів (18).

Для цього використаємо два випадки: 1) коли у двох векторах є спільна точка; 2) коли такої точки немає.

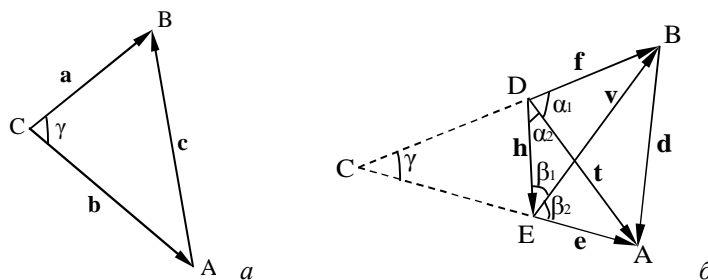


Рис. 1. Визначення кута між векторами:  
 а – коли точка (вузол вхідний або вихідний) є спільна;  
 б – коли вектори не мають спільних точок

Нехай мережа складається з трьох вузлів (рис. 1, а): А, В і С.

Значимо, що між кожною парою вузлів існує двосторонній зв'язок, тобто  $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ .

Позначимо:  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{r}$  і  $\overrightarrow{BA} = \mathbf{r}'$ , оскільки вони протилежно напрямлені.

Значимо, що тут вводиться додаткова умова для будь-якої комбінації векторів трикутників (рис. 1):

$$|\mathbf{q}| + |\mathbf{p}| \geq |\mathbf{s}|,$$

де  $\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{s}$  – вектори довільного трикутника.

Для рис. 1, а визначимо компоненту метричного тензора векторів  $\mathbf{a}$  і  $\mathbf{b}$  за допомогою (18):

$$g_{ab} = g_{a^*b^*} = \cos g = (\mathbf{r}^2 + \mathbf{b}^2 - \mathbf{c}^2) / 2\mathbf{a}\mathbf{b}, \quad (23)$$

$$g_{ab^*} = g_{a^*b} = \cos g = (\mathbf{r}^2 + \mathbf{b}^2 - \mathbf{c}'^2) / 2\mathbf{a}\mathbf{b}'. \quad (24)$$

З (23),(24) використані індекси  $a, a^*$  та  $b, b^*$  відповідають векторам  $\mathbf{a}$  та  $\mathbf{b}$  відповідно, причому прийнято, що коли пара індексів одночасно немає або має позначку “\*”, то згідно з (18)  $x'$  відповідає  $\mathbf{c}$ , а в іншому випадку –  $\mathbf{c}'$ .

Компоненти метричного тензора для векторів  $\mathbf{a}$  і  $\mathbf{a}'$  матимуть вигляд:

	$a$	$a^*$	$a'$	$a'^*$
$a$	1	1	-1	-1
$a^*$	1	1	-1	-1
$a'$	-1	-1	1	1
$a'^*$	-1	-1	1	1

(25)

Зрозуміло, що добуток компоненти метричного тензора одного вектора на інший дорівнює одиниці ( $\mathbf{e}_i^2 = 1$ ), а для протилежно напрямлених –1, наприклад:

$$g_{aa'} = (\mathbf{a}^2 + \mathbf{a}'^2 - (\mathbf{a} + \mathbf{a}')^2) / 2\mathbf{a}\mathbf{a}' = -1. \quad (26)$$

Представимо компоненти метричного тензора для векторів  $\mathbf{a}$  та  $\mathbf{b}$ :

	$b$	$b^*$	$b'$	$b'^*$
$a$	$(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - \mathbf{c}^2) / 2\mathbf{a}\mathbf{b}$	$(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - \mathbf{c}'^2) / 2\mathbf{a}\mathbf{b}$	$(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}'^2 - \mathbf{c}^2) / 2\mathbf{a}\mathbf{b}'$	$(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}'^2 - \mathbf{c}'^2) / 2\mathbf{a}\mathbf{b}'$
$a^*$	$(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - \mathbf{c}^2) / 2\mathbf{a}\mathbf{b}$	$(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - \mathbf{c}'^2) / 2\mathbf{a}\mathbf{b}$	$(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}'^2 - \mathbf{c}^2) / 2\mathbf{a}\mathbf{b}'$	$(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}'^2 - \mathbf{c}'^2) / 2\mathbf{a}\mathbf{b}'$
$a'$	$(\mathbf{a}'^2 + \mathbf{b}^2 - \mathbf{c}^2) / 2\mathbf{a}'\mathbf{b}$	$(\mathbf{a}'^2 + \mathbf{b}^2 - \mathbf{c}'^2) / 2\mathbf{a}'\mathbf{b}$	$(\mathbf{a}'^2 + \mathbf{b}'^2 - \mathbf{c}^2) / 2\mathbf{a}'\mathbf{b}'$	$(\mathbf{a}'^2 + \mathbf{b}'^2 - \mathbf{c}'^2) / 2\mathbf{a}'\mathbf{b}'$
$a'^*$	$(\mathbf{a}'^2 + \mathbf{b}^2 - \mathbf{c}^2) / 2\mathbf{a}'\mathbf{b}$	$(\mathbf{a}'^2 + \mathbf{b}^2 - \mathbf{c}'^2) / 2\mathbf{a}'\mathbf{b}$	$(\mathbf{a}'^2 + \mathbf{b}'^2 - \mathbf{c}^2) / 2\mathbf{a}'\mathbf{b}'$	$(\mathbf{a}'^2 + \mathbf{b}'^2 - \mathbf{c}'^2) / 2\mathbf{a}'\mathbf{b}'$

(27)

Розглянемо мережу з чотирьох вузлів: А, В D і Е (рис. 1, б), для якої визначимо компоненту метричного тензора векторів  $\mathbf{e}$  і  $\mathbf{f}$ , що не мають спільних точок.

Оскільки їх не можна визначити за допомогою (18), то для цього нам необхідно знайти кут  $\angle C$ , використовуючи теорему косинусів для чотирикутників:

$$\cos \angle C = (\mathbf{d}^2 + \mathbf{h}^2 - \mathbf{v}^2 - \mathbf{t}^2) / 2\mathbf{e}\mathbf{f}. \quad (28)$$

Подамо компоненти метричного тензора для векторів  $\mathbf{e}$  та  $\mathbf{f}$ :

	$f$	$f^*$	$f'$	$f'^*$
$e$	$(\mathbf{d}^2 + \mathbf{h}^2 - \mathbf{v}^2 - \mathbf{t}^2) / 2\mathbf{e}\mathbf{f}$	$(\mathbf{d}'^2 + \mathbf{h}^2 - \mathbf{v}^2 - \mathbf{t}^2) / 2\mathbf{e}\mathbf{f}$	$(\mathbf{d}^2 + \mathbf{h}^2 - \mathbf{v}^2 - \mathbf{t}^2) / 2\mathbf{e}\mathbf{f}'$	$(\mathbf{d}'^2 + \mathbf{h}^2 - \mathbf{v}^2 - \mathbf{t}^2) / 2\mathbf{e}\mathbf{f}'$
$e^*$	$(\mathbf{d}^2 + \mathbf{h}'^2 - \mathbf{v}^2 - \mathbf{t}^2) / 2\mathbf{e}\mathbf{f}$	$(\mathbf{d}'^2 + \mathbf{h}'^2 - \mathbf{v}^2 - \mathbf{t}^2) / 2\mathbf{e}\mathbf{f}$	$(\mathbf{d}^2 + \mathbf{h}'^2 - \mathbf{v}^2 - \mathbf{t}^2) / 2\mathbf{e}\mathbf{f}'$	$(\mathbf{d}'^2 + \mathbf{h}'^2 - \mathbf{v}^2 - \mathbf{t}^2) / 2\mathbf{e}\mathbf{f}'$
$e'$	$(\mathbf{d}^2 + \mathbf{h}^2 - \mathbf{v}^2 - \mathbf{t}^2) / 2\mathbf{e}'\mathbf{f}$	$(\mathbf{d}'^2 + \mathbf{h}^2 - \mathbf{v}^2 - \mathbf{t}^2) / 2\mathbf{e}'\mathbf{f}$	$(\mathbf{d}^2 + \mathbf{h}^2 - \mathbf{v}^2 - \mathbf{t}^2) / 2\mathbf{e}'\mathbf{f}'$	$(\mathbf{d}'^2 + \mathbf{h}^2 - \mathbf{v}^2 - \mathbf{t}^2) / 2\mathbf{e}'\mathbf{f}'$
$e'^*$	$(\mathbf{d}^2 + \mathbf{h}^2 - \mathbf{v}^2 - \mathbf{t}^2) / 2\mathbf{e}'\mathbf{f}$	$(\mathbf{d}'^2 + \mathbf{h}^2 - \mathbf{v}^2 - \mathbf{t}^2) / 2\mathbf{e}'\mathbf{f}$	$(\mathbf{d}^2 + \mathbf{h}^2 - \mathbf{v}^2 - \mathbf{t}^2) / 2\mathbf{e}'\mathbf{f}'$	$(\mathbf{d}'^2 + \mathbf{h}^2 - \mathbf{v}^2 - \mathbf{t}^2) / 2\mathbf{e}'\mathbf{f}'$

де прийнято, що при використанні індексів  $f^*$  і  $f'^*$  в (28) замість  $\overset{\bullet}{h}$  використовуємо  $\overset{\bullet}{h}'$ , а для індексів  $e^*$  і  $e'^*$  в (28) замість  $\overset{\bullet}{d} - \overset{\bullet}{d}'$ .

Також прийнято, що діагональні компоненти визначаються як:

$$\tilde{v} = (\overset{\bullet}{v} + \overset{\bullet}{v}') / 2; \quad (29)$$

$$\tilde{t} = (\overset{\bullet}{t} + \overset{\bullet}{t}') / 2. \quad (30)$$

Для визначення метричного контраваріантного тензора використовуємо співвідношення:

$$g^{ij} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{ij}}, \quad (31)$$

де  $g = \det|g_{ij}|$  – визначник метричного коваріантного тензора.

Розглянемо випадок, коли навантаження між вузлами можна описати за допомогою експоненціального закону розподілу.

Зокрема, згідно з рис. 1,  $a$  навантаження між вузлами мережі подамо у вигляді:

$$CB: 1 - e^{-at};$$

$$CA: 1 - e^{-bt};$$

$$AB: 1 - e^{-ct}.$$

За (27), компоненти метричного тензора  $g_{ab}$  визначаємо як:

$$g_{ab} = \frac{(1 - e^{-at})^2 + (1 - e^{-bt})^2 - (1 - e^{-ct})^2}{2(1 - e^{-at})(1 - e^{-bt})}. \quad (32)$$

Для (15) знаходимо:

$$\begin{aligned} \frac{dg_{ab}}{dt} = & \frac{((1 - e^{-at})^2 + (1 - e^{-bt})^2 - (1 - e^{-ct})^2)}{2(1 - e^{-at})(1 - e^{-bt})} \left[ \frac{ae^{-at}}{(1 - e^{-at})} + \frac{be^{-bt}}{(1 - e^{-bt})} \right] + \\ & + \frac{ae^{-at}(1 - e^{-at}) + be^{-bt}(1 - e^{-bt}) - ce^{-ct}(1 - e^{-ct})}{2(1 - e^{-at})(1 - e^{-bt})} \end{aligned} \quad (33)$$

### Висновки

Для визначення стану телекомунікаційної мережі представлено тензорну модель її дослідження з використанням криволінійної системи координат. Розглянуто багатовимірну систему координат, компонентами якої є навантаження між вузлами, та описано визначення метричного тензора, символів Крістофеля, тензорів Рімана, Річчі, скаляра кривизни простору для різних просторів.

Для мережі з чотирьох вузлів вперше визначено компоненту метричного тензора векторів, використовуючи теорему косинусів для чотирикутника з врахуванням двостороннього зв'язку між кожною парою вузлів. У роботі пропонується збільшити кількість компонент метричного тензора, що дало змогу представити метрику у симетричному тензорному полі, яка застосовується для опису деформації ріманової метрики, щоб переходити з евклідового простору в гіперболічний і навпаки.

1. Рябов Г. Маршрутизация на решетчато-клеточных структурах // Выч. мет. программирование, 5:1 (2004). – С. 107–117.
2. Донченко В. Евклидовы пространства числовых векторов и матриц: конструктивные методы описания базовых структур и их использование // International Journal “Information Technologies & Knowledge” 2011. – Vol. 5. – No. 3. – С. 203–216.
3. Стрихалюк Б. М. Підвищення ефективності динамічної маршрутизації у гетерогенних сервісно-орієнтованих системах з використанням гіперболічних потоків Річі / Б. М. Стрихалюк, Ю. В. Климаш, І. Б. Стрихалюк, Б. В. Коваль // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. Серія: Радіоелектроніка та телекомунікації : збірник наукових праць. – 2015. – № 818. – С. 189–194.
4. Kleinberg R. Geographic routing using hyperbolic space in Proc. 26th IEEE Conf. Commun. Soc., 2007,

pp. 1902–1909. 5. Eppstein D., Goodrich M. Succinct Greedy Geometric Routing Using Hyperbolic Geometry, *IEEE Trans. Comp.* vol. 60, no. 11, 2011, pp. 1571–1580. 6. Chow B., Luo F. Combinatorial Ricci flows on surfaces, *J. Different. Geometry*, vol. 63, no. 1, pp. 97–129, 2003. 7. Пурхаді В., Разави А. Поток Риччи на контактних многообразиях // *Сиб. матем. журн.*, 56:5 (2015), 1142–1153; *Siberian Math. J.*, 56:5 (2015), С. 912–921. 8. Huai-Dong Cao, Xi-Ping Zhu. A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures – application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow, *Asian J. Math.*, 10, No. 2:165–492, 2006. 9. Shi X. Ricci deformation of the metric on complete noncompact Riemannian manifolds, *J. of Diff. Geom.* 30, 1989, pp. 303–394. 10. Климаш М. М. Тензорна модель телекомунікаційної мережі на основі криволінійної системи координат / М. М. Климаш, М. В. Кайдан, Б. М. Сtrykhaluk // *Телекомунікаційні та інформаційні технології.* – 2016. – № 3. – С. 14–21.

### References

1. Ryabov, G. (2004), “Routing on lattice-cell structures”, *Vich. Met. Programming*, 5: 1, pp. 107–117. 2. Donchenko, V. (2011), “Euclidean spaces of numerical vectors and matrices: constructive methods for the description of the basic structures and their use”, *International Journal “Information Technologies & Knowledge”* Vol.5, Number 3, pp. 203–216. 3. Strykhaluk, B.M., Klymash, Yu.V., Strykhalyuk, I. B. and Koval, B. V (2015), “Increasing the effectiveness of dynamic routing in heterogeneous service-oriented systems using hyperbolic flows Richie”, *Bulletin of the National University “Lviv Polytechnic”, Series: Radio Electronics and Telecommunications: a collection of scientific works*, No. 818, pp. 189–194. 4. Kleinberg, R. (2007), “Geographic routing using hyperbolic space” in *Proc. 26th IEEE Conf. Commun. Soc.*, pp. 1902–1909. 5. Eppstein, D., Goodrich, M. (2011), “Succinct Greedy Geometric Routing Using Hyperbolic Geometry”, *IEEE Trans. Comp.* vol. 60, no. 11, pp. 1571-1580. 6. Chow, B., Luo, F. (2003), “Combinatorial Ricci flows on surfaces”, *J. Different. Geometry*, vol. 63, no. 1, pp. 97–129. 7. Pirhadi, V., Razavi, A. (2015), “The flow of Ricci on contact manifolds”, *Sibirsk. Mat. Journal*, 56: 1142-1153; *Siberian Math. J.*, 56: 5, pp. 912-921. 8. Huai-Dong Cao, Xi-Ping Zhu. (2006), “A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures – application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow”, *Asian J. Math.*, 10, No. 2:165–492. 9. Shi X. (1989), “Ricci deformation of the metric on complete noncompact Riemannian manifolds”, *J. of Diff. Geom.* 30, pp. 303-394. 10. Klymash, M. M., Kaydan, M. V., Strykhaluk, B. M. (2016), “Tensor model of telecommunication network based on the curvilinear coordinate system”, *Telecommunication and Information Technologies*, No. 3, pp. 14–21.