

### Висновки

Існує декілька підходів до проектування, в яких проектувальник може виокремити ті чи інші можливості засобу проектування. У випадку технології МЕМС з'являються нові підходи до проектування і всі вони дуже різняться один від одного. Вони не тільки дозволяють візуалізувати процес виготовлення присторою, але й дають змогу проектувальнику приймати оптимальні рішення під час проектування.

1. Kun Wang, Clark T.-C.Nguyen. *High-order medium frequency micromechanical electronics filters // IEEE J. of Microelectromechanical Systems.* – Dec.1998. – Vol. 8, N 4. – P. 534–557. 2. Lin L., Howe R.T., Pisano A.P. *Micromechanical filters for signal processing // IEEE J. of Microelectromechanical Systems.* – Sept.1998. – Vol. 7, No.3. – P. 286–294. 3. *CFD-Micromesh™. Tutorials. Version 1.4; CFD Research Corporation.* – July 2001. 4. Varghese M., Rabinovich V.L., Sentura S.D. *Reduced-order models of stress-stiffened MEMS structures.* 5. Wachutka G. *From Continuous Field Modeling to MEMS Macromodels, MIXDES 2002.*

УДК. 621. 313. 33

В.С. Маляр, І.Р. Гавдьо

Національний університет "Львівська політехніка"  
кафедра теоретичної та загальної електротехніки

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В АСИНХРОННИХ ДВИГУНАХ З ЕКРАНОВАНИМИ ПОЛЮСАМИ НЕЯВНИМ МЕТОДОМ НА ОСНОВІ СПЛАЙН-ФУНКЦІЙ

© Маляр В.С., Гавдьо І.Р., 2003

**Розроблена математична модель для розрахунку перехідних процесів в асинхронних двигунах з екранованими полюсами неявним методом інтегрування диференціальних рівнянь на основі апроксимації інтегральної кривої кубічними сплайнами. При цьому для розрахунку електромагнітних зв'язків використовується розгалужена заступна схема магнітопроводу двигуна.**

**A mathematical model for transient processes analysis in shaded-pole induction motor using implicit method of integration based on integral curve approximation by cubic splines is presented. The electromagnetic couplings are calculated on the base of ramified equivalent circuit of motor magnetic circuit.**

### Постановка проблеми

Серед широкого спектра електричних мікромашин чинне місце належить однофазним асинхронним двигунам з екранованими полюсами (АДЕП), які нерідко називають двигунами з розщепленими полюсами. На явновиражених полюсах такого двигуна розміщена зосереджена обмотка збудження, яка живиться від джерела синусоїдної напруги, а частина полюса охоплена короткозамкненим витком, який створює часовий зсув магнітного потоку, що через нього проходить. Ротор АДЕП симетричний і має короткозамкнену обмотку типу білячої клітки. Отже, двигун має магнітну та електричну несиметрію, внаслідок чого

розподіл магнітної індукції у повітряному проміжку значно відрізняється від синусоїдного, а електромагнітний момент має постійну та змінну складові. Отже, незважаючи на простоту конструкції, АДЕП належить до найскладніших для математичного моделювання електричних машин. На процеси в АДЕП впливає насичення магнітопроводу, яке в різних ділянках суттєво відрізняється.

#### Аналіз останніх досліджень

Під час проектування двигуна необхідно здійснювати перевірку його робочих властивостей не тільки в усталених, але й перехідних режимах роботи. При цьому для досягнення високої точності розрахунків електромагнітних процесів в АДЕП необхідно використовувати математичні моделі високого рівня адекватності, які є достатньо складними. У той же час відомі методики [1, 2] вимагають використання багатьох спрощуючих допущень і не задовольняють сучасним вимогам. Зокрема в роботі [2] насичення враховується за допомогою усереднених коефіцієнтів, що не дає змоги врахувати локальні насичення ділянок магнітопроводу, а це відбивається на точності розрахунку режимів роботи АДЕП, особливо динамічних.

#### Задачі досліджень

Метою статті є розроблення алгоритму розрахунку перехідних процесів у АДЕП неявним методом на основі використання математичної моделі двигуна високого рівня адекватності і сплайн-апроксимації інтегральних кривих.

#### Виклад основного матеріалу

Розроблена нами математична модель АДЕП має у своїй основі зображення магнітного кола машини розгалуженою заступною схемою з високим рівнем деталізації магнітопроводу (рисунок). При складанні заступної схеми магнітного кола ротор розбитий на  $2s$  секторів (по  $s$  секторів на полюсну поділку). З них:  $k$  секторів знаходяться під магнітним шунтом;  $m$  секторів – під пазом, в якому розміщений короткозамкнений виток;  $l$  секторів – під екранованою частиною полюса;  $n$  секторів – під неекранованою частиною полюса. На показаній на рисунку схемі  $k = 2, l = 2, m = 1, n = 3, s = k + m + l + n = 8$ .

До заступної схеми магнітного кола входять магнітні опори  $R_{aj}$  ( $j = \overline{1, 2s}$ ) –  $2s$  ділянок ярма ротора;  $R_{\delta j}, R_{zj}$  ( $j = \overline{1, 2s}$ ) –  $2s$  секторів повітряного проміжку і зубцевої зони відповідно;  $R_{ujj}$  ( $j = \overline{1, 2k}$ ) – ділянок шунта;  $R_{um}$  – стику шунта з полюсним наконечником;  $R_e$  – паза з короткозамкненим витком;  $R_{n1}$  ( $R_{n4}$ ) – ділянки полюса від ярма статора до короткозамкненого витка;  $R_{n2}$  ( $R_{n5}$ ) – ділянки екранованої частини полюса;  $R_{n3}$  ( $R_{n6}$ ) – ділянки неекранованої частини полюса;  $R_0$  – шляхів потоків розсіяння між полюсом та ярмом статора;  $R_{yj}$  ( $j = \overline{1, 6}$ ) – ділянок ярма статора, а також намагнічувальні сили:  $T_{n1} = T_{n2} = w_f i_f$  – обмотки збудження з кількістю витків  $w_f$  і струмом  $i_f$ ;  $T_{e1} = T_{e2} = i_k$  – розташованого на частині полюса короткозамкненого витка зі струмом  $i_k$ ;  $T_{pj} = (j = \overline{1, 2s})$  – обмотки ротора, яка для  $j$ -го сектора визначається через струми поздовжнього ( $i_d$ ) та поперечного ( $i_q$ ) контурів ротора за формулою

$$T_{pj} = 2w(i_d \cos \gamma_j + i_q \sin \gamma_j) / \pi p,$$

де  $w$  – кількість витків еквівалентної обмотки ротора,  $p$  – кількість пар полюсів, а  $\gamma$  – кут, який визначає положення  $j$ -го сектора відносно осі  $d$ .



У результаті процеси в АДЕП описуються системою диференціальних рівнянь (ДР) електричної рівноваги контурів статора і ротора та скінченних рівнянь, що описують заступну схему магнітопроводу (рисунок). Оскільки ця система рівнянь нелінійна, для розрахунку перехідних процесів необхідно чисельним методом проінтегрувати систему ДР на необхідному часовому інтервалі. Відомі алгоритми розрахунку перехідних процесів в електричних машинах здебільшого орієнтовані на явні методи інтегрування систем ДР [3]. При цьому на кожному кроці інтегрування потрібно розраховувати магнітний стан двигуна. Однією з проблем є те, що повна система рівнянь складається з диференціальних та скінченних. У зв'язку з цим при застосуванні явних методів інтегрування ДР діють двома способами: зводять скінченні рівняння до диференціальних або на кожному крокові для заданих струмів визначають координати магнітного стану шляхом розв'язування нелінійної системи рівнянь магнітної рівноваги ітераційним методом, на підставі яких визначають диференціальні індуктивності, які є коефіцієнтами ДР.

Відзначимо, що матриця Якобі вектор-функції стану характеризується значним розкидом власних чисел, а ДР, які описують електромагнітні і, тим більше, електромеханічні процеси в АДЕП, є жорсткими [4]. Тому чисельне інтегрування системи ДР явними методами вимагає малого кроку, а це призводить до накопичення помилок. Застосування неявних методів усуває вищезгадані проблеми. По-перше, тут відсутня проблема жорсткості, а по-друге, при їх застосуванні система ДР апроксимується системою скінченних рівнянь, які вкупі зі скінченними рівняннями магнітної рівноваги становлять повну нелінійну систему алгебричних рівнянь, яка розв'язується на кожному крокові чисельного інтегрування ітераційним методом Ньютона. Тому для розрахунку перехідного процесу в АДЕП доцільно використовувати неявні методи інтегрування ДР. Серед останніх найефективнішим є метод формул диференціювання назад (ФДН) [5], згідно з яким похідна векторної функції  $\bar{y}$  в  $j$ -му вузлі визначається  $n$  значеннями цієї функції у попередніх вузлах.

$$\left. \frac{d\bar{y}}{dt} \right|_j = \frac{1}{h} \sum_{\xi=0}^n \alpha_{\xi} \bar{y}_{j-\xi}, \quad (1)$$

де  $h = t_j - t_{j-1}$ ,  $\alpha_{\xi}$  – постійні коефіцієнти, які визначаються тільки геометрією шаблону.

Практика розрахунку перехідних процесів методом ФДН з автоматичним вибором кроку та порядку полінома показує, що останній здебільшого не перевищує трьох. У зв'язку з цим нами запропоновано [6] для апроксимації підінтегральної функції використовувати не звичайні поліноми, а кубічні сплайни. Це дає змогу зменшити на одиницю кількість вузлів шаблону, необхідних для побудови апроксимаційного полінома, а, значить, зменшити обсяг інформації, яку необхідно мати в пам'яті машини для виконання наступного кроку.

Для опису електромагнітних зв'язків в АДЕП виберемо систему ортогональних осей  $d$ ,  $q$ , яка жорстко зв'язана зі статором. У цьому випадку контури статора фізичні, а короткозамкнена обмотка ротора замінюється двома еквівалентними обмотками, розташованими по осях  $d$  і  $q$  відповідно загальної методики. Рівняння електричної рівноваги за таких перетворень мають вигляд

$$\frac{d\bar{\psi}}{dt} = \Omega \bar{\psi} + r\bar{i} + \bar{u}(t), \quad (2)$$

де  $\bar{\psi} = (\psi_f, \psi_k, \psi_d, \psi_q)^T$ ;  $\bar{i} = (i_f, i_k, i_d, i_q)^T$  – вектори потокозчеплень та струмів обмотки збудження ( $f$ ), короткозамкненого витка ( $k$ ) та поздовжнього ( $d$ ) і поперечного ( $q$ )

еквівалентних контурів ротора,  $\vec{u}(t) = (U_m \sin \omega t, 0, 0, 0)^T$  – вектор прикладених напруг, в якому  $U_m, \omega_0$  – амплітуда та циклічна частота напруги живлення, а верхній індекс “т” означає транспонування;

$$r = \begin{matrix} \begin{matrix} -r_f & & & \\ & -r_k & & \\ & & -r_d & \\ & & & -r_q \end{matrix} \\ ; \end{matrix} \quad \Omega = \begin{matrix} \begin{matrix} & \omega & & \\ -\omega & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \end{matrix}$$

– матриці, в яких:  $r_f, r_k, r_d, r_q$  – активні опори контурів,  $\omega$  – кутова швидкість обертання ротора.

Для розрахунку електромеханічних перехідних процесів систему ДР (2) необхідно доповнити рівнянням руху ротора

$$\frac{d\omega}{dt} = c_1 (\Psi_d i_q - \Psi_q i_d) - c_2 M_e(t), \quad (3)$$

де  $c_1 = 1.5 p^2 / J$ ;  $c_2 = p / J$ ;  $J$  – момент інерції;  $M_e(t)$  – залежність від часу моменту на валу двигуна.

Утворивши вектори

$$\vec{y} = (\vec{\psi}, \omega)^T; \quad \vec{x} = (\vec{i}, \omega)^T, \quad (4)$$

векторні рівняння (2) і (3) можна записати одним векторним рівнянням

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{z}(\vec{y}, \vec{x}, t), \quad (5)$$

де  $\vec{z}$  – вектор-функція правих частин рівнянь (2), (3).

Систему (5) ДР електромеханічної рівноваги необхідно розв’язувати разом із системою скінченних рівнянь магнітної рівноваги, яка описує магнітне коло машин (рисунок). При цьому зауважимо, що, оскільки картина магнітного поля під різними полюсами повторюється, то можна обмежитись контурами, які належать до однієї полюсної поділки, тобто використати умови симетрії. Крім того, рівняння доцільно скласти за методом контурних потоків, кількість яких дорівнює  $4 + s$ .

Систему рівнянь магнітної рівноваги подамо у вигляді

$$T\vec{i} - \Gamma\vec{F}(\vec{\Phi}) = 0, \quad (6)$$

де  $T$  – матриця, добуток якої на вектор  $\vec{i}$  струмів визначає контурні намагнічувальні сили;  $\Gamma$  – матриця інцидентій графа магнітного кола машини,  $\vec{F}$ ,  $\vec{\Phi}$  – вектори спадів магнітних напруг та магнітних потоків.

Отже, повна система рівнянь, яка описує перехідний процес, складається з ДР (5) та скінченних (6), що створює певні труднощі при застосуванні явних методів інтегрування. При застосуванні неявного методу необхідно звести ДР до скінченних. Для цього скористаємось запропонованим в [6] сплайн-методом, згідно з яким отриманий шляхом апроксимації компонент вектора  $\vec{y}$  кубічними сплайнами на триточковому шаблоні алгебричний аналог системи (5) ДР має вигляд

$$\sigma_2 \vec{y}_{j-2} + \sigma_1 \vec{y}_{j-1} + \sigma_0 \vec{y}_j + \beta_2 \vec{z}_{j-2} + \beta_1 \vec{z}_{j-1} + \beta_0 \vec{z}_j = 0, \quad (7)$$

де  $\vec{z}_j = \vec{z}_j(\vec{y}_j, \vec{x}_j, t_j)$  – значення правих частин системи (5) ДР у  $j$ -му вузлі;

$$\sigma_2 = \frac{3}{h_{j-1}^2}; \quad \sigma_1 = \frac{3}{h_j^2} - \frac{3}{h_{j-1}^2}; \quad \sigma_0 = -\frac{3}{h_j^2};$$

$$\beta_2 = \frac{1}{h_{j-1}}; \quad \beta_1 = \frac{2}{h_j} + \frac{2}{h_{j-1}}; \quad \beta_0 = \frac{1}{h_j}; \quad h_j = t_j - t_{j-1}.$$

Система (6), (7) рівнянь – нелінійна. Для її розв’язування застосуємо ітераційний метод Ньютона, згідно з яким на кожній  $l$ -й ітерації для обчислення поправок  $\Delta \bar{x}_j^{(l)}$ ,  $\Delta \bar{\Phi}_j^{(l)}$  векторів  $\bar{x}$  і  $\bar{\Phi}$  необхідно розв’язувати систему рівнянь

$$\left( \sigma_0 \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} \Big|_j + \beta_0 \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{x}} \Big|_j \right) \Delta \bar{x}_j^{(l)} = Q_j^{(l)};$$

$$\Gamma \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\Phi}} \Big|_j \Delta \bar{\Phi}_j^{(l)} - T \Delta \bar{i}_j^{(l)} = P_j^{(l)},$$
(8)

де  $Q_j^{(l)}$ ,  $P_j^{(l)}$  – вектори значень нев’язок систем відповідно (6) і (7);

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}} = \sigma_0 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline L_{ff} & L_{fk} & L_{fd} & L_{fq} & 0 \\ \hline L_{kf} & L_{kk} & L_{kd} & L_{kq} & 0 \\ \hline L_{df} & L_{dk} & L_{dd} & L_{dq} & 0 \\ \hline L_{qf} & L_{qk} & L_{qk} & L_{qq} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array};$$

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{x}} =$$

$$= \beta_0 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline -r_f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -r_k & 0 & 0 & 0 \\ \hline L_{qf} & L_{qk} & -r_d + L_{qd} & L_{qq} & \psi_q \\ \hline -L_{df} & -L_{dk} & -L_{dd} & -r_q - L_{dq} & -\psi_d \\ \hline (L_{df} i_q - L_{qf} i_d) c_1 & (L_{dk} i_q - L_{qk} i_d) c_1 & (L_{dd} i_q - L_{qd} i_d) c_1 & (L_{dq} i_q - L_{qq} i_d + \psi_d) c_1 & 0 \\ \hline \end{array};$$

$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\Phi}} = R_m$  – матриця диференціальних магнітних опорів елементів магнітного кола АДЕП (рисунок), які визначаються для лінійних ділянок аналітично, а для нелінійних – шляхом диференціювання їх характеристик намагнічування. Останні апроксимуються кубічними сплайнами.

Потокозчеплення контурів АДЕП визначаються за формулами

$$\psi_n = 2w_f \Phi_{n1}; \quad \psi_e = 2\Phi_{n2};$$

$$\psi_d = \frac{4}{\pi} w \sum_{i=1}^s \Phi_{\delta i} \cos \gamma_i; \quad \psi_q = \frac{4}{\pi} w \sum_{i=1}^s \Phi_{\delta i} \sin \gamma_i.$$

Для початку розрахунку перехідного процесу або після зміни кроку інтегрування необхідно мати значення координат режиму у двох попередніх точках, що можна здійснити, використовуючи формулу [6]

$$3\bar{y}_j - 2h_j\bar{z}_j = 3\bar{y}_{j-1} + h_j\bar{z}_{j-1}. \quad (9)$$

### Висновки

Високої точності результатів математичного моделювання електромагнітних процесів в АДЕП можна досягнути на основі розрахунку його магнітного поля. Зображення магнітопроводу АДЕП розгалуженою заступною схемою дає змогу з достатньо високою точністю при порівняно невеликому обсязі обчислень розрахувати магнітне поле машини. При цьому процеси в АДЕП описуються системою ДР електромеханічної рівноваги і скінченних рівнянь, що описують заступну схему магнітопроводу. Для АДЕП, як і для багатьох інших типів електромеханічних перетворювачів, властивою є жорсткість ДР електромеханічної рівноваги. У той же час відомі алгоритми розрахунку перехідних процесів орієнтовані на явні методи числового інтегрування ДР, що пов'язано з низкою проблем, зумовлених жорсткістю. Застосування неявних методів числового інтегрування дає змогу звести ДР до скінченних і уникнути проблем, пов'язаних із жорсткістю. У статті запропонований алгоритм розрахунку перехідних процесів в АДЕП неявним методом ФДН. Застосування замість звичайних поліномів кубічних сплайнів, дає змогу зменшити обсяг інформації, яку необхідно зберігати в пам'яті машини, та скоротити обсяг обчислень при тій самій точності розрахунків.

1. Юферов Ф.М. *Электрические машины автоматических устройств: Учеб. для вузов.* – М., 1988. – 479 с. 2. Тазов Г.В., Хрущев В.В. *Математическая модель асимметричной асинхронной машины // Электричество.* – 1989. – № 1. – С. 41–49. 3. Гавдьо І.Р. *Розрахунок перехідних процесів в асинхронних двигунах з екранованими полюсами // Вісн. Держ. ун-ту “Львівська політехніка”.* – 2001. – № 418. – С. 34–38. 4. Деккер К., Вервер Я. *Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений: Пер. с англ.* – М., 1988. – 334 с. 5. Чуа Л.О., Лин Пен-Мин. *Машинный анализ электронных схем: Пер. с англ.* – М., 1980. – 640 с. 6. Маляр В., Совин Р. *Метод математичного моделювання перехідних процесів в електромеханічних перетворювачах // Вісн. Держ. ун-ту “Львівська політехніка”* – 2000. – № 403. – С. 93–96.