

## УЗАГАЛЬНЕННЯ РОЗРАХУНКІВ НА ЖОРСТКІСТЬ ТА МІЦНІСТЬ РЕЗОНАНСНИХ ПРУЖНИХ СИСТЕМ ВІБРАЦІЙНИХ МАШИН З ПРОСТИМ РУХОМ РОБОЧОГО ОРГАНА

© Ланець О.С., 2008

**Виведено узагальнені формули для розрахунку на жорсткість та міцність пружних систем вібраційних машин, в яких робочий орган здійснює простий рух. Дано рекомендації щодо оптимального підбору комбінованої пружної системи.**

**In the article a generalized formulas for the calculation on inflexibility and strength of the resilient systems of vibratory machines is hatches, in which a working organ carries out simple motion. Given recommendation in relation to optimum choice of the combined resilient system.**

**Вступ.** Будь-яку вібраційну машину, як механічну коливальну систему (МКС), можна розбити на три основні складові: коливальні маси, пружні системи та привід. Якщо під час інженерного проектування масам надаються довільні геометричні параметри та форми залежно від суб'єктивної думки розробника та технічних вимог, і, в принципі, можна обійтись без ретельного їх розрахунку на власні форми коливальних, міцність тощо; електромагнітний привід підбирається з уже уніфікованих заводом-виробником параметрів (в основному за тяговим зусиллям) і практично не потребує ніяких перерахувань; то пружні системи вимагають не тільки вивіреного розрахунку, а й якісних конструктивних рішень, ретельного виготовлення та кріплення, відповідної експлуатації. Безумовно, це найвідповідальніші деталі вібраційних машин.

До пружних систем належать еластичні ланки вібраційних машин, які виконують дві основні функції: пружно з'єднують між собою маси, або утримують усю МКС на основі. Особливістю таких ланок є те, що їх жорсткість порівняно з жорсткістю мас, значно нижча. Збурена МКС буде деформуватися в цих найменш жорстких місцях і розглядатиметься як система абсолютно твердих тіл, з'єднаних пружними зв'язками. З одного боку, така ідеалізація значно полегшує розрахунки МКС, з іншого, обумовлює досягнення високої жорсткості мас, що необхідно технологічно, і часто буває важко реалізувати. Трапляються випадки, коли деформація маси функціонально передбачена. У такому разі маса частково чи повністю виконує значення пружних елементів і її необхідно розглядати як тіло з розподіленою масою.

Пружні системи поділяють на два основних типи [1, 2]: резонансні та віброізоляційні. Основне призначення будь-якої пружної системи, що зв'язує між собою дві маси – це надати необхідну жорсткість на певній ділянці МКС, забезпечуючи відповідний напрямок коливальних або ж не впливаючи на рух мас. У такому випадку пружні системи можуть підводити МКС під резонанс, виконуючи значення резонансних або відводити від резонансу, виконуючи значення віброізоляційних. Характерною особливістю останніх є те, що вони працюють винятково в зарезонансному режимі. Необхідно пам'ятати, що пружні системи розраховуються під конкретні інерційні параметри мас. Тільки певний підбір параметрів жорсткості пружних систем та інерційних параметрів мас утворюють МКС з необхідними властивостями.

У деяких випадках пружні системи здійснюють тільки необхідну спрямованість коливальних і, як і віброізолятори, виконуються якомога еластичнішими, зменшуючи сили реакції в опорах. До таких систем, для прикладу, належать лоток з прямолінійним рухом, що підводиться до виходу бункерного живильника і сприймає від нього коливання, подаючи деталі на подальші технологічні операції.

За час бурхливого розвитку вібраційної техніки апробовано десятки різновидів пружних систем, складовими яких є пружні елементи різних типів і конструкцій: плоскі пружні елементи прямокутного та круглого перерізів (стрижні та торсіони), виті пружини, гумові подушки і прокладки, гумові пневмобалони тощо [1, 2]. Існують вібраційні машини, в яких застосовуються комбіновані пружні системи, що поєднують сталеві пружні елементи з пневматичними, гумовими. Однак широкого поширення, як резонансні, такі системи не здобули. Гумові пружні елементи переважно працюють на стиск або на зсув та здебільшого виконують значення віброізоляційних. Резонансними елементами вібраційних машин з електромагнітним приводом використання гуми не виправдане, оскільки їм притаманні такі явища, як значна дисипація енергії та старіння. Однак, якщо і застосовувати гумові пружні елементи за таким призначенням, тоді рекомендується застосовувати гуму, що працює на зсув. У такому разі в пружних елементах зменшуються втрати на пружний гістерезис і виходять сприятливіші робочі характеристики.

Резонансними пружними системами найчастіше використовуються плоскі та круглі пружні елементи. Виті елементи як резонансні використовують рідше, що пов'язано з трудністю їх жорсткої фіксації на масах та трудністю забезпечення напрямлених коливань. Основне їх призначення – віброізоляція і пружний зв'язок з опорними масами. Вони можуть слугувати однією з ланок комбінованих пружних елементів, працюючи на стиск.

Мінімальну кількість пружних систем  $n_c$ , що застосовується в вібраційній машині з електромагнітним приводом для зв'язку мас між собою, можна знайти згідно з співвідношенням:

$$n_c = \wp - 1,$$

де  $\wp$  – кількість мас. Максимально можлива кількість незалежних пружних систем, які можна використати в МКС з кількістю мас  $\wp$ , знаходимо як:

$$n_c = \begin{cases} \wp - 1, & \text{коли } \wp = 2; \\ 3 \cdot (\wp - 2), & \text{коли } \wp \neq 2. \end{cases}$$

Резонансні пружні системи є найважливішими елементами вібраційних машин з електромагнітним приводом. Від їх виконання, позиціонування і механічних характеристик багато в чому залежить експлуатаційна надійність і довговічність вібромашин. Слугують вони для надання коливального руху масам у білярезонансних режимах і мають значення перетворювачів кінетичної енергії руху мас у потенційну енергію пружної деформації. Нагромаджена ними потенціальна енергія в другій половині ходу знову перетвориться в кінетичну енергію руху мас. У цих елементах вібраційної машини виникають найбільші деформації. Жоден вузол машини не може зрівнятися за сприйнятими навантаженнями на одиницю жорсткості. Тому, під час проектування вібраційних машин, саме розрахунку резонансних пружних систем приділяється найбільшій увазі.

До недавня матеріалами пружних елементів використовували переважно пружні сталі серії 65Г, високоякісні 60С2, 60С2А, 60С2ХФА тощо. На сучасному етапі все більшого поширення здобувають склотекстоліти марок ВФТ-С, КАСТ-В. Цей матеріал доволі непогано себе зарекомендував. Хоча за механічними властивостями він поступається сталям, однаковою перевагою його є те, що на виготовлення з нього пружних елементів не потрібно використовувати такі дорогі технологічні операції, як шліфування, гартування, відпал. Крім того цей матеріал добре сприймає знакомінні навантаження, його багат шаровість запобігає поширенню тріщин. Взагалі, в перспективі, механіка перейде на композитні матеріали, механічні властивості яких прирівнюватимуться до високоякісних сталей. Ця тенденція спостерігається в провідних країнах світу, особливо у виробництві високотехнологічної продукції.

**Постановка проблеми.** Сьогодні найбільшого поширення у вібраційних машинах як резонансні пружні системи для забезпечення простого руху: зворотно-прямолінійного, зворотно-обертового, зворотно-гвинтоподібного за одним ступенем рухомості (надалі просто прямолінійного (напрявленого), обертового (кутового), гвинтоподібного), здобули комбінації пружних елементів, деформація робочої ділянки яких у напрямку основного руху здійснюється за рахунок зміщення одного кінця пружного елемента відносно другого в поступальному русі (рис. 1). Це забезпечується

жорстким защемленням кінців пружних елементів у рухомих масах вібраційних машин. Форма поперечного перерізу таких елементів переважно прямокутна. Пов'язано це з тим, що напруження, які виникають в елементах такого профілю, нижчі, ніж в елементах круглого перерізу, оскільки радіус інерції останніх більший. Для забезпечення обертального руху можна використовувати циліндричний торсіон, що працює на кручення. Найчастіше він виконується в парі з гратчастим торсіоном у вигляді розташованих колом вертикальних або похилих пружних елементів (рис. 2).

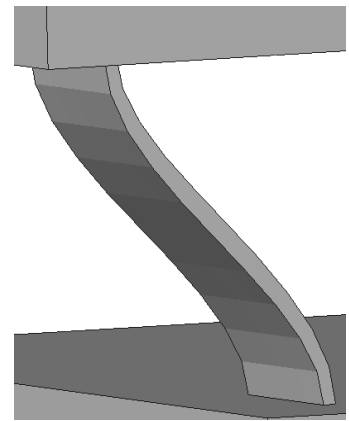


Рис. 1. Схема згину плоского пружного елемента

До вібраційних машин з електромагнітним приводом, що обов'язково використовують резонансні пружні елементи, належать транспортери, бункери, сепаратори, дозатори, підйомники тощо. Природа деформації пружних елементів в таких вібраційних машинах однакова. При цьому, пружні елементи вібраційних бункерних живильників сприймають найскладніші деформації. Своєю чергою у вібраційних транспортерах відбуваються прості деформації пружних елементів, які, будучи складовими деформацій пружних елементів вібраційних бункерних живильників, можна описати, враховуючи складніші випадки за допомогою спрощень. Про це свідчать і можливі видозміни в конструкціях самих вібр машин. Так, вібраційний бункерний живильник, в якому деталі рухаються спіралеподібною доріжкою, має комбіновану пружну систему, що показана на рис. 2. Вона може виродитись у пружну систему для вібраційного транспортера, де деталі уже рухатимуться вздовж лінійного напрямку, збільшенням до нескінченності середнього радіуса  $R$  розташування пружних елементів гіперболоїдного торсіона.

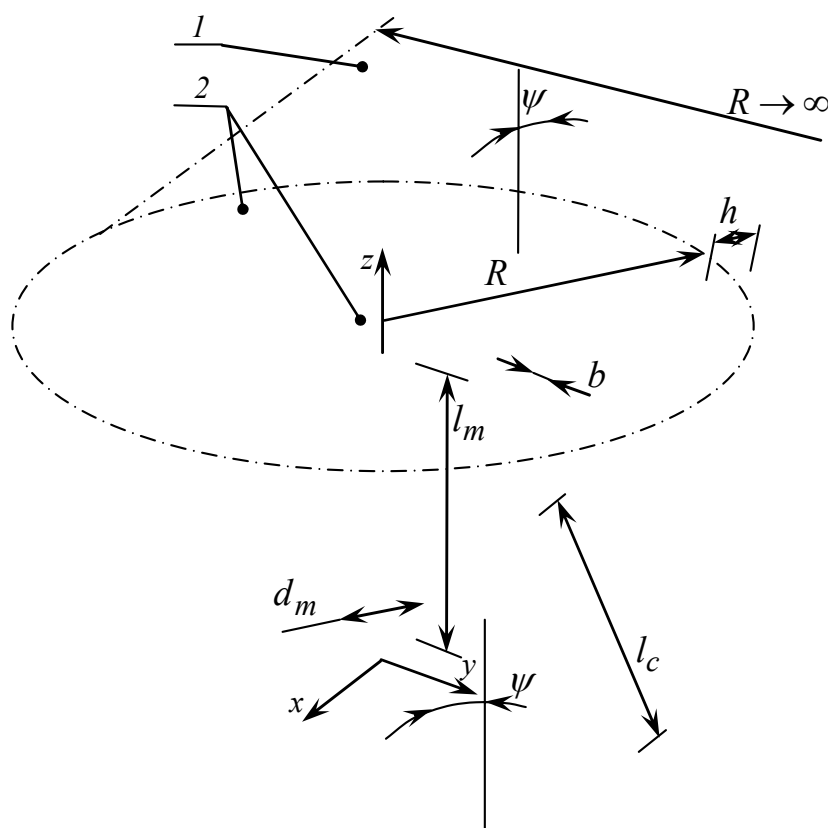


Рис. 2. Схематичне розташування елементів пружних систем для забезпечення прямолінійного (1) та обертального або гвинтового (2) рухів робочого органа

Кількість комбінацій пружних систем для забезпечення простого руху робочого органа становить близько десяти. Для їх розрахунку необхідно використовувати різні аналітичні вирази.

Однак, зважаючи на вищевикладене, де обґрунтовується одна і та сама природа деформацій пружних систем, виникає логічна потреба в об'єднанні цих розрахунків в одну аналітичну формулу-шаблон, яка б за можливістю максимально охопила усі найбільш використовувані випадки. Це без сумніву спростило би підбір необхідного аналітичного виразу для розрахунку певної пружної системи. Крім того, цей вираз ніс би узагальнений характер, який би ще раз підкреслював тотожність фізичних деформацій в різних конструкціях пружних систем різноманітних вібраційних машин.

**Огляд літератури та постановка задачі.** Незважаючи на значний наробіток у сфері розрахунку пружних резонансних систем вібраційних машин з простим рухом робочого органа [1–2], у вищезазначених наукових працях не зустрічалось матеріалів, що присвячувались би проблемі зведення цих розрахунків в один аналітичний вираз. Тому спробуємо навести такий аналітичний вираз, що увібрав би в себе усі найбільше використовувані випадки розрахунку.

**1. Формула-шаблон розрахунку на жорсткість<sup>1</sup>.** Удосконалювати існуючі розрахунки немає потреби. Вони з доволі високою точністю описують реальні моделі. Для узагальнення цих розрахунків потрібне повне розуміння фізики процесу, що призводить до необхідності виведення формули-шаблону, а не до аналізу існуючих виразів з подальшим формуванням загальної формули, яка може бути громіздкою та нерациональною.

Як вказано вище, найбільше узагальнений випадок деформації пружних систем для забезпечення простого руху робочого органа припадає на вібраційні бункерні живильники. У такому разі за основу узагальненої моделі навантаження пружної системи покладемо модель, де пружні елементи 1 прямокутного профілю в перерізі розташовані колом середнім радіусом  $R$  під кутом  $\psi$  до вертикалі і скручуються загальним крутним моментом  $M_{кр}$  (рис. 3).

Для спрощення викладення вважаємо, що нижня частина системи жорстко защемлена. Розглянемо окремо плоский пружний елемент<sup>2</sup> гіперболоїдного торсіона під навантаженням (рис. 4). Оскільки стрижень зазнає як складного згину, так і кручення, користуючись принципом суперпозицій, запишемо рівняння енергетичного балансу, що і міститиме затрати енергій за незалежними напрямками деформації. Так, загальна енергія  $E_{\Sigma}$ , яка затрачається на скручування пружної системи моментом  $M_{кр}$  на кут  $\varphi$  становитиме

$$E_{\Sigma} = \frac{c \varphi^2}{2}, \quad (1)$$

де  $c = c_{кр}$  – сумарна жорсткість пружної системи на кручення навколо осі  $z$ , аналітичні вирази для визначення якої наведено в 2-му розділі;  $\varphi$  – кут закручування (кутова амплітуда коливань).

З іншого боку, загальна енергія  $E_{\Sigma}$  здеформованої системи міститиме такі складові енергії:

$$E_{\Sigma} = E_{зг} + E_{бз} + E_{зак.с} + E_{зак.т}, \quad (2)$$

де

$$E_{зг} = \frac{c_{зг} \delta^2}{2} \quad (3)$$

– енергія, що затрачається на згин пружного стрижня на лінійну величину

$$\delta = \frac{\varphi R \cos \alpha}{\cos \psi}, \quad (4)$$

<sup>1</sup> Під розрахунком на жорсткість розумітимемо визначення необхідних геометричних параметрів пружних елементів для забезпечення їх певної жорсткості.

<sup>2</sup> Під час розгляду гіперболоїдного торсіона, як синонім словосполученню “пружний елемент” використовуватимемо слова “пружний стрижень” або просто “стрижень”.

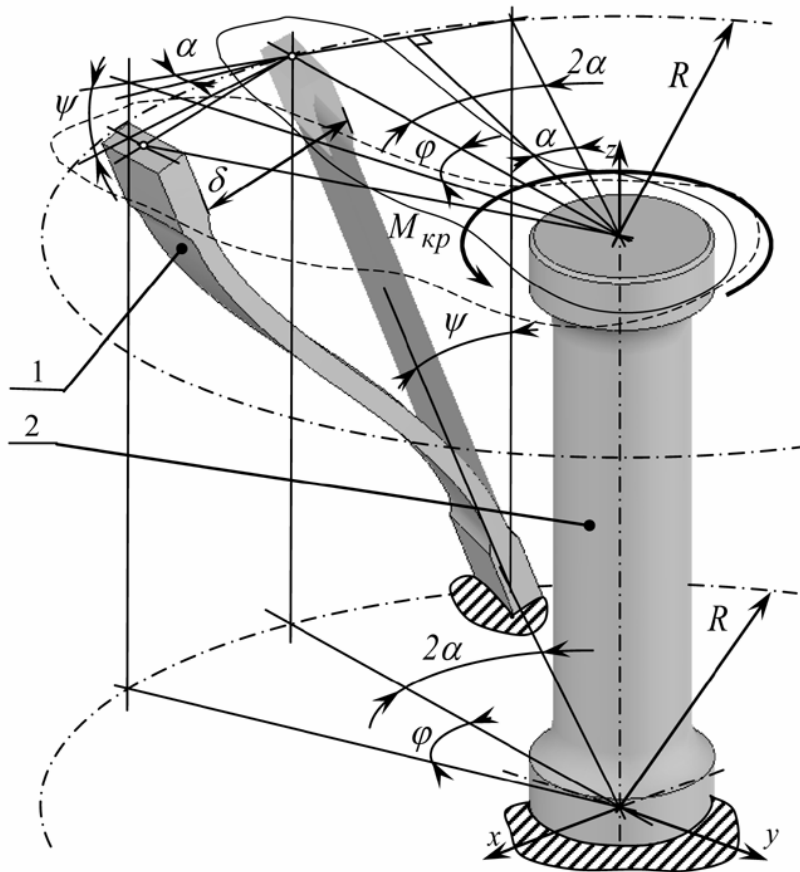


Рис. 3. Загальна картина деформації пружної системи для забезпечення гвинтоподібного руху робочого органа:  
1 – плоский пружний елемент; 2 – циліндричний торсіон

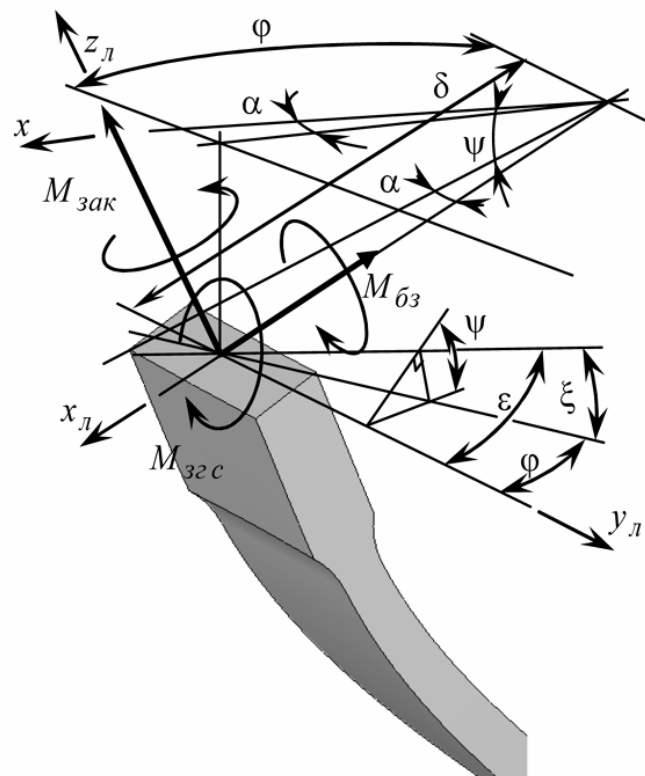


Рис. 4. Схема деформації та навантаження кінця пружного стрижня

коли один кінець елемента поступально зміщується відносно другого в напрямку дуги повороту вздовж осі  $x_L$  під дією сили  $P_{32}$  та згинального моменту  $M_{32c}$  на кінці стрижня, що діє в площині  $x_L z_L$ ;  $\alpha$  – кут, що визначається як:

$$\alpha = \arcsin \frac{l_c \sin \psi}{R}; \quad (5)$$

де  $x_L y_L z_L$  – локальна система координат, що прив'язана до верхнього кінця пружного стрижня.

Вираз для жорсткості  $c_{32c}$  стрижня за такої схеми згину можна визначити з використанням рівняння переміщень в канонічній формі, яка для цієї схеми деформації набуває вигляду

$$\begin{cases} P_{32} \delta_{11} + M_{32c} \delta_{12} = \delta; \\ P_{32} \delta_{21} + M_{32c} \delta_{22} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

У нашому випадку значення коефіцієнтів  $\delta_{ij}$  системи рівнянь дорівнюють

$$\delta_{11} = \frac{l_c^3}{3 E J_y}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l_c^2}{2 E J_y}; \quad \delta_{22} = \frac{l_c}{E J_y}, \quad (7)$$

де  $J_y$  – момент інерції поперечного перерізу пружного стрижня відносно нейтральної осі  $y_L - y_L$ :

$$J_y = \frac{hb^3}{12}, \quad (8)$$

тут  $h$  та  $b$  – ширина та товщина в поперечному перерізі пружного стрижня (див. рис. 2);  $E$  – модуль пружності першого роду. Враховуючи (8) та після підстановки коефіцієнтів  $\delta_{ij}$  з (7) в систему канонічних рівнянь (6) і розв'язуючи її відносно  $P_{32}$  та  $M_{32c}$ , отримаємо

$$P_{32} = \frac{12 E J_y \delta}{l_c^3} = \frac{E h b^3 \delta}{l_c^3}; \quad (9)$$

$$M_{32c} = \frac{6 E J_y y_L - y_L \delta}{l_c^2} = \frac{E h b^3 \delta}{2 l_c^2}. \quad (10)$$

Отже, жорсткість  $c_{32c}$  одного пружного стрижня за цієї схеми деформації його кінців, з урахуванням (9) визначається згідно з формулою

$$c_{32c} = \frac{P_{32}}{\delta} = \frac{E h b^3}{l_c^3}; \quad (11)$$

Наступна складова виразу (2)

$$E_{\bar{\sigma}_3} = \frac{c_{\bar{\sigma}_3} \xi^2}{2} \quad (12)$$

– енергія, що затрачається на боковий згин пружного стрижня, коли його один кінець повертається відносно другого на кут бокового згину

$$\xi = \varphi \sin \psi, \quad (13)$$

розглядаючи пружний стрижень як консоль, де на вільному кінці прикладений крутний момент  $M_{\bar{\sigma}_3}$ , що діє в площині  $y_L z_L$ .

Жорсткість стрижня  $c_{\bar{\sigma}_3}$  за такої схеми згину визначаємо аналогічно до попереднього випадку. Тому рівняння переміщень в канонічній формі для цієї схеми деформації набуває вигляду

$$M_{\bar{\sigma}_3} \delta'_{22} = \varphi \sin \psi, \quad (14)$$

де за аналогією з (7):

$$\delta'_{22} = \frac{l_c}{E J_x}, \quad (15)$$

а момент інерції  $J_x$  поперечного перерізу пружного стрижня відносно нейтральної осі  $x_l - x_l$  дорівнює:

$$J_x = \frac{bh^3}{12}. \quad (16)$$

Отже, підставляючи (15) та (16) в (14), отримаємо:

$$M_{\bar{\sigma}_3} = \frac{E J_x}{l_c} \varphi \sin \psi = \frac{E b h^3}{12 l_c} \varphi \sin \psi, \quad (17)$$

звідки

$$c_{\bar{\sigma}_3} = \frac{E J_x}{l_c} = \frac{E b h^3}{12 l_c}; \quad (18)$$

Третя складова виразу (2)

$$E_{зак.с} = \frac{c_{зак.с} \varepsilon^2}{2} \quad (19)$$

– енергія, що затрачається на закручування пружного стрижня на кут

$$\varepsilon = \varphi \cos \psi \quad (20)$$

під дією прикладеного крутного моменту

$$M_{зак} = \frac{G \beta h b^3 \varepsilon}{l_c}, \quad (21)$$

що діє в площині  $x_l y_l$  локальної системи координат. Жорсткість стрижня  $c_{зак.с}$  за такої схеми навантаження, користуючись (21) та (20):

$$c_{зак.с} = \frac{G \beta h b^3}{l_c}, \quad (22)$$

де  $G$  – модуль пружності другого роду;  $\beta$  – коефіцієнт, що залежить від співвідношення сторін  $h$  і  $b$  під час визначення моменту інерції прямокутного перерізу, який, користуючись [2, 3], можна апроксимувати до вигляду  $\beta = \frac{\gamma - 0.63}{3\gamma}$ , де  $\gamma$  – співвідношення сторін прямокутного перерізу плоского пружного стрижня,  $\gamma = h/b$ ;

Остання складова енергії у виразі (2):

$$E_{зак.т} = \frac{c_{зак.т} \varphi^2}{2} \quad (23)$$

– енергія, що затрачається на закручування торсіона на кут  $\varphi$ , тут  $c_{зак.т}$  – жорсткість торсіона за такої схеми навантаження:

$$c_{зак.т} = \frac{G J_p}{l_m} = \frac{G \pi \cdot d_m^4}{32 l_m}, \quad (24)$$

де  $J_p$  – полярний момент інерції поперечного перерізу циліндричного торсіона:

$$J_p = \frac{\pi \cdot d_m^4}{32}. \quad (25)$$

Енергія  $E_{зак.т}$  не прив'язана до енергетичних витрат на деформацію плоского пружного стрижня і вона наявна, коли в комбінацію гіперболоїдного гратчастого торсіона вводиться, що часто буває, циліндричний торсіон.

З урахуванням (1), (3), (4), (11), (12), (13), (18), (19), (20), (22), (23), (24) вираз (2) набуде вигляду:

$$c_{кр} \varphi^2 = n \left[ \frac{E \gamma b^4 \varphi^2 R^2 \cos^2 \alpha}{l_c^3 \cos^2 \psi} + \frac{E \gamma^3 b^4 \varphi^2 \sin^2 \psi}{12 l_c} + \frac{G \beta \gamma b^4 \varphi^2 \cos^2 \psi}{l_c} \right] + \frac{G \pi \cdot d^4 \varphi^2}{32 l_m}, \quad (26)$$

де  $n$  – кількість пружних стрижнів гіперболоїдного торсіона. Виразивши з рівняння (26) значення товщини пружних елементів  $b$ , отримуємо:

$$b = \sqrt[4]{\frac{c_{кр} \varphi^2 - \frac{G \pi \cdot d^4 \varphi^2}{32 l_m}}{n \left[ \frac{E \gamma \varphi^2 R^2 \cos^2 \alpha}{l_c^3 \cos^2 \psi} + \frac{E \gamma^3 \varphi^2 \sin^2 \psi}{12 l_c} + \frac{G \beta \gamma \varphi^2 \cos^2 \psi}{l_c} \right]}}. \quad (27)$$

У разі, коли нам необхідно отримати прямолінійні коливання, колова система вібраційного бункерного живильника перетворюється в лінійну так:  $R \rightarrow \infty$ ,  $\alpha \rightarrow 0$  (5) та  $\varphi \rightarrow 0$ . При цьому, загальна енергія  $E_{\Sigma}$  деформації пружної системи затратиметься суто на згин пружних елементів.

У такому разі нам необхідно оперувати таким виразом:  $E_{\Sigma} = c_{3z} \delta_x^2 / 2$ , де  $c_{3z}$  – сумарна жорсткість на згин пружної системи в напрямку осі  $x$ ,  $\delta_x$  – відносне сумарне зміщення кінців пружних елементів в напрямку осі  $x$ . Крім того, межа  $\lim_{R \rightarrow \infty, \varphi \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0} R \varphi = \delta_x$ , що підтверджується логічними міркуваннями.

Враховуючи вищенаведене, вираз (27) набуде вигляду

$$\lim_{R \rightarrow \infty, \varphi \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0} \sqrt[4]{\frac{c_{3z} \delta_x^2 - \frac{G \pi \cdot d^4 \varphi^2}{32 l_m}}{n \left[ \frac{E \gamma \delta_x^2 \cos^2 \alpha}{l_c^3 \cos^2 \psi} + \frac{E \gamma^3 \varphi^2 \sin^2 \psi}{12 l_c} + \frac{G \beta \gamma \varphi^2 \cos^2 \psi}{l_c} \right]}} = \sqrt[4]{\frac{c_{3z} l_c^3 \cos^2 \psi}{E \gamma n}}. \quad (28)$$

Якщо пружна система не скручується моментом, а стискається вздовж осі  $z$  зусиллям  $P_c$ , зручно оперувати лінійною жорсткістю  $c_z$  на стиск пружної системи вздовж осі  $z$ . Для цього в вираз (27) для обертального руху необхідно крутильну жорсткість  $c_{кр}$  замінити на  $c_z R^2 \operatorname{tg} \psi$ , а в виразі (28) для прямолінійного руху згинальну жорсткість  $c_{3z}$  замінити на  $c_z \operatorname{tg} \psi$ . Інколи необхідно використовувати пружні елементи круглого перерізу. У такому разі в вищенаведених аналітичних виразах необхідно моменти інерції  $J_y$  (8) та  $J_x$  (16) замінити на момент інерції круглого перерізу стрижня діаметром  $d_c$  відносно осі симетрії:

$$J_c = \frac{\pi d_c^4}{64} \quad (29)$$

та використати в (22) замість складової  $\beta h b^3$  полярний момент  $J_p$  круглого перерізу для випадку скручування стрижня:

$$J_{pc} = \frac{\pi d_c^4}{32}. \quad (30)$$

Додатково врахуємо коефіцієнт так званого заземлення пружного елемента (системи), який переважно коливається в межах  $k \in 0.7 \dots 0.9$ . Цей коефіцієнт враховує неідеальну затяжку гвинтами та болтами, що мають свою податливість, мікролофти в кріпленні тощо. Все це знижує сумарну жорсткість пружних систем. Тому на практиці необхідно дещо збільшити жорсткість пружної системи щодо розрахункового значення.

Враховуючи вищенаведені викладення, формула-шаблон розрахунку на жорсткість пружних систем вібраційних машин, в яких робочий орган здійснює простий рух, набуде вигляду



$$b \left. \vphantom{b} \right\} d_c = \sqrt[4]{\frac{C-D}{kn \left( \frac{EK}{l_c^2 \cos^2 \psi} + H \right)}}, \quad (31)$$

а значення невідомих  $C, D, K$  та  $H$  вибирають з табл. 1.

Таблиця 1

Значення невідомих формули-шаблон (31)

Показник	Вид коливань			
	Обертальні			Лінійні
$C$	Використання жорсткості в	горизонтальній площині	$c_{кр}$	$c_{зз}$
		вертикальній площині	$c_z R^2 \operatorname{tg} \psi$	$c_z \operatorname{tg} \psi$
$D$	Наявність центрального циліндричного торсіону	Присутній	$\frac{G\pi \cdot d_m^4}{32l_m}$	0
		Відсутній	0	
	Поперечний переріз пружного стержня			
	Прямокутний	Круглий	Прямокутний	Круглий
$K$	$\gamma R^2 \cos^2 \alpha$	$\frac{3\pi}{16} R^2 \cos^2 \alpha$	$\gamma$	$\frac{3\pi}{16}$
$H$	$\gamma \left( \frac{E\gamma^2 \sin^2 \psi}{12} + G\beta \cos^2 \psi \right)$	$\frac{\pi}{32} \left( \frac{E \sin^2 \psi}{2} + G \cos^2 \psi \right)$	0	

Користуючись шаблон-формулою (31), наведемо кілька аналітичних виразів з розрахунку пружних систем. Так, формула для визначення товщини  $b$  плоского пружного елемента гіперболоїдного торсіона, використовуючи крутильну жорсткість, матиме такий вигляд:

$$b = \sqrt[4]{\frac{c_{кр}}{\frac{En\gamma k}{l_c} \left[ \frac{R^2 \cos^2 \alpha}{l_c^2 \cos^2 \psi} + \frac{\gamma^2 \sin^2 \psi}{12} + \frac{G\beta \cos^2 \psi}{E} \right]}}, \quad (32)$$

а з урахуванням центрального циліндричного торсіона (32) переписеться як

$$b = \sqrt[4]{\frac{32l_m c_{кр} - G\pi \cdot d_m^4}{\frac{32l_m En\gamma k}{l_c} \left[ \frac{R^2 \cos^2 \alpha}{l_c^2 \cos^2 \psi} + \frac{\gamma^2 \sin^2 \psi}{12} + \frac{G\beta \cos^2 \psi}{E} \right]}}. \quad (33)$$

Розподіл співвідношення жорсткостей між циліндричним та гіперболоїдним торсіоном буде виконано в п. 3. Для визначення товщини плоских пружних елементів вібраційного транспортера з прямолінійними коливаннями, коли  $\psi = 0$ , формула-шаблон набуває найпростішого вигляду

$$b = \sqrt[4]{\frac{c_{зз} l_c^3}{E\gamma n k}}. \quad (34)$$

Виконаємо порівняльний аналіз отриманих аналітичних залежностей з відомими результатами. При цьому нам краще оперувати параметрами жорсткості. Так, користуючись формулою (32), жорсткість на кручення без урахування коефіцієнта защемлення становитиме

$$c_{кр} = \frac{Eb^4 n \gamma}{l_c} \left[ \frac{R^2 \cos^2 \alpha}{l_c^2 \cos^2 \psi} + \frac{\gamma^2 \sin^2 \psi}{12} + \frac{G\beta \cos^2 \psi}{E} \right]. \quad (35)$$

Свою чергою відомий вираз, що наведений в [2, 3], має вигляд

$$c_{кр} = \frac{Eb^4 n R^2}{l_c^3} \left[ \gamma \frac{\sin^2 \tilde{\theta}}{\cos^2 \psi} + \frac{\gamma^3 \cos^2 \tilde{\theta}}{3} + \frac{G\beta l_c^2 \cos^2 \psi}{ER^2} \right], \quad (36)$$

де  $\tilde{\theta} = \arccos\left(\frac{l_c \sin \psi}{2R}\right)$ . Результати розрахунку за цими двома формулами практично ідентичні, що свідчить про можливу взаємозамінність обох виразів, незважаючи на деяку відмінність у результаті. Ці вирази є порівняно точними, оскільки дають непоганий результат порівняно з числовим розрахунком. Так, для таких параметрів пружної системи:  $R = 0.1 \text{ м}$ ;  $l_c = 0.2 \text{ м}$ ;  $h = 0.05 \text{ м}$ ;  $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ;  $G = 8.1 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ;  $\psi = \pi/6$ ,  $n = 6$ ;  $b = 0.005 \text{ мм}$ , значення крутильної жорсткості за (35) становить  $c_{кр} = 9.215 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м} / \text{рад}$ , а за (36) –  $c_{кр} = 9.543 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м} / \text{рад}$ . Результат числового розрахунку показаний на рис. 5, де крутний момент  $M_{кр} = 1000 \text{ Н} \cdot \text{м}$  приклали до верхнього рухомого фланця гіперболоїдного торсіона при нерухомому нижньому.

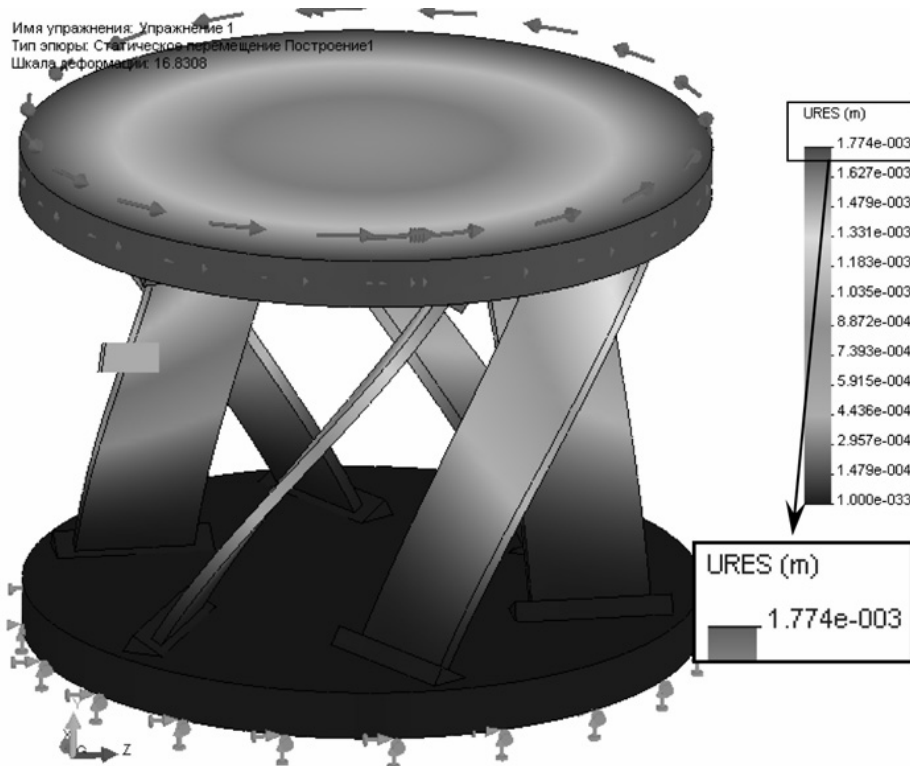


Рис. 5. Результат розрахунку гіперболоїдного торсіона на жорсткість методом скінченних елементів

При цьому, на крайньому радіусі верхнього фланця  $R_f = 0.14 \text{ м}$  отримано загальне переміщення  $\delta = 0.001774 \text{ м}$ , яке в горизонтальному напрямку становить  $\delta_x = \delta \cos \psi = 0.001536 \text{ м}$ . Кут, на який скрутився фланець  $\varphi = \arctan(\delta_x / R) = 0.011 \text{ рад}$ , а отже, жорсткість  $c_{кр} = M_{кр} / \varphi = 9.091 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м} / \text{рад}$ . Отже, запропонована формула (35) дає дещо вище значення жорсткості пружної системи порівняно з числовим розрахунком, де відносна похибка становить 1.3 %, а вираз (36) дає похибку 4.7 %, що є допустимо для інженерних розрахунків.

**2. Формула-шаблон розрахунку на міцність.** За розрахункову схему знову приймаємо ту, що на рис. 3, через вищевикладені аргументи. Перевірку напруженого стану в поперечних перерізах пружних елементів виконуватимемо за умови, що максимальні напруження  $\sigma_{\max}$  не перевищують допустимих напружень на витривалість  $\sigma_{-1}$  для циклічних навантажень,  $\sigma_{\max} \leq [\sigma_{-1}]$ . Тобто, пружна система повинна мати високу надійність, забезпечуючи необхідні амплітуди коливань, за яких в пружних елементах не створюватимуться напруження, які перевищують допустимі для симетричного, як найважчого, циклічного навантаження.

Спочатку визначимо напруження, які виникають у пружних елементах 1 (див. рис. 3) гратчастого торісона. Елемент під навантаженням на своїх двох кінцях зазнає як згину, під дією двох взаємоперпендикулярних згинальних моментів  $M_{z2c}$  (10) та  $M_{\phi3}$  (17), так і кручення під дією крутного моменту  $M_{zak}$  (21) (див. рис. 4). Користуючись принципом суперпозицій, визначимо окремо напруження на згин та кручення. Максимальні напруження в пружному стрижні в умовах згину під дією двох згинальних моментів  $M_{z2c}$  та  $M_{\phi3}$ , відповідно становлять

$$\sigma_{\max 1} = \frac{M_{z2c}}{W_1} = \frac{6M_{z2c}}{hb^2}; \quad \sigma_{\max 2} = \frac{M_{\phi3}}{W_2} = \frac{6M_{\phi3}}{bh^2}, \quad (37)$$

де  $W_1, W_2$  – моменти опору поперечного перерізу пружного стрижня в напрямку дії відповідно моментів  $M_{z2c}$  та  $M_{\phi3}$ . У нашому випадку:

$$W_1 = \frac{hb^2}{6}; \quad W_2 = \frac{bh^2}{6}. \quad (37a)$$

Отже, вирази для визначення нормальних напружень у пружному елементі гратчастого торісона:

$$\sigma_{\max 1} = \frac{3Eb}{l_c^2} \frac{\phi R \cos \alpha}{\cos \psi}; \quad \sigma_{\max 2} = \frac{E\gamma b \phi \sin \psi}{2l_c}. \quad (38)$$

Максимальне напруження в пружному стрижні під час кручення

$$\tau_{\max c} = \frac{M_{zak}}{W_{kp}}, \quad (39)$$

де  $W_{kp}$  – момент опору прямокутного перерізу пружного елемента під час кручення;

$$W_{kp} = \Lambda hb^2, \quad (40)$$

де  $\Lambda$  – коефіцієнт, що залежить від співвідношення сторін  $h$  і  $b$  під час визначення моменту опору прямокутного перерізу. З урахуванням (21) та (40), вираз для (39) набуде вигляду

$$\tau_{\max c} = \frac{G\beta b \phi \cos \psi}{l_c \Lambda}. \quad (41)$$

Згідно з третьою гіпотезою міцності

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\left(\sqrt{(\sigma_{\max 1})^2 + (\sigma_{\max 2})^2}\right)^2 + 4\tau^2}, \quad (42)$$

отже, максимальне напруження  $\sigma_{\max}$  в поперечному перерізі пружного елемента з урахуванням (38), (41) та (42) визначається за формулою

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\left(\frac{E}{l_c} \sqrt{\left(\frac{3b}{l_c} \frac{\phi R \cos \alpha}{\cos \psi}\right)^2 + \left(\frac{\gamma b}{2} \phi \sin \psi\right)^2}\right)^2 + 4\left(\frac{G\beta b \phi \cos \psi}{l_c \Lambda}\right)^2}. \quad (43)$$

У разі, коли пружна система бункерного живильника вироджується в пружну систему для надання прямолінійного руху, аналогічно п. 4.1.1,  $\lim_{R \rightarrow \infty} R\varphi = \delta_x$ ,  $\alpha \rightarrow 0$  та  $\varphi \rightarrow 0$ , тоді вираз (43) переписується як:

$$\sigma_{\max} = \frac{3Eb}{l_c^2} \frac{\delta_x}{\cos \psi}. \quad (44)$$

Використання пружних елементів круглого перерізу обумовлено змінами, що наведені в п. 1. Отже, формула-шаблон розрахунку пружних елементів на міцність набуде вигляду

$$\sigma_{\max} = k_{\text{кон}} \cdot a \sqrt{\left( \frac{E}{l_c} \sqrt{\left( \frac{3}{l_c} \frac{\mathfrak{R}}{\cos \psi} \right)^2 + N^2} \right)^2 + 4S^2}, \quad (45)$$

де  $k_{\text{кон}}$  – коефіцієнт, що враховує концентрацію напружень, а значення показників беруть з табл. 2.

Таблиця 2

Значення показників формули-шаблону (45)

Показник	Вид коливань			
	Обертальні		Лінійні	
$\mathfrak{R}$	$R \cos \alpha$		$\delta_x$	
	Поперечний переріз пружного стрижня			
	Прямокутний	Круглий	Прямокутний	Круглий
$N$	$\frac{\gamma}{2} \sin \psi$	$\frac{1}{2} \sin \psi$	0	
$a$	$b\varphi$	$d\varphi$	$b$	$d$
$S$	$\frac{G\beta \cos \psi}{l_c \Lambda}$	$\frac{G \cos \psi}{2l_c}$	0	

Максимальне тангенційне напруження  $\tau_{\max m}$  у поперечному перерізі циліндричного торсіона визначатиметься за формулою

$$\tau_{\max m} = \frac{M_{\text{кр } m}}{W_p}, \quad (46)$$

де  $M_{\text{кр } m}$  – крутний момент, що діє на кінцях циліндричного торсіона

$$M_{\text{кр } m} = \frac{G\varphi J_p}{l_m}; \quad (47)$$

$W_p$  – полярний момент опору поперечного перерізу циліндричного торсіона

$$W_p = \frac{\pi \cdot d_m^3}{16}. \quad (48)$$

Підставляючи (47) та (48) в (46), максимальне напруження  $\tau_{\max m}$  у поперечному перерізі циліндричного торсіона

$$\tau_{\max m} = \frac{G\varphi d_m}{2l_m}. \quad (49)$$

На рис. 6 показано результат розрахунку на міцність методом скінченних елементів. Так, під час скручування гіперболоїдного торсіона на кут  $\phi = 0.011 \text{ рад}$ , напруження становить

$\sigma_{\max} = 3.042 \cdot 10^8 \text{ Па}$ . Згідно з розрахунком за формулою (43), прийнявши  $k_{\text{кон}} = 2$ ,  
 $\sigma_{\max} = 3.056 \cdot 10^8 \text{ Па}$ . Як бачимо, збіжність результатів доволі висока.

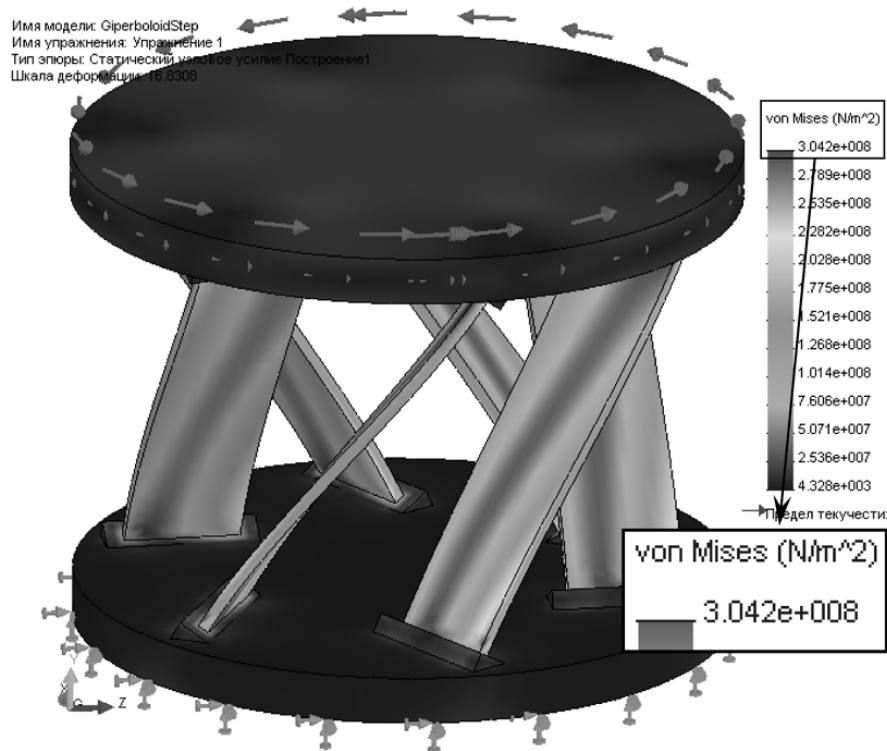


Рис. 6. Результат розрахунку гіперболоїдного торсіона на міцність

**3. Рекомендації щодо розрахунку та вибору конструктивних параметрів комбінованої пружної системи.** Розглянемо комбіновану пружну систему (див. рис. 2), яка складається з двох незалежних систем, параметри яких під час розрахунків необхідно узгоджувати. Залежно від того, яке призначення комбінованої пружної системи, можна розглядати такі способи визначення її геометричних параметрів [4–5]:

а) *Рекомендації щодо розрахунку жорсткості за умови незалежного підбору робочих довжин пружних елементів гратчастого та центрального циліндричного торсіонів.* Оскільки гратчастий та центральний циліндричний торсіони працюють за паралельною схемою, то сумарна жорсткість  $c_{кр}$  комбінованої пружної системи становитиме

$$c_{кр} = c_{кр\text{ гр}} + c_{кр\text{ ц}}, \quad (50)$$

де  $c_{кр\text{ гр}}$  – сумарна жорсткість на кручення гратчастого торсіона;  $c_{кр\text{ ц}}$  – жорсткість на кручення циліндричного торсіона.

Переважно на практиці приймається, що центральний циліндричний торсіон сприймає близько 90 % [1–3] сумарної жорсткості  $c_{кр}$  комбінованої пружної системи. Гратчастий торсіон, у такому випадку, призначений для усування паразитних кутових коливань робочого органа у вертикальній площині. Використання комбінації центрального циліндричного та гратчастого торсіонів забезпечує реалізацію кутових коливань суто в горизонтальній площині або рухатись паралельно горизонтальній площині за гвинтовою траєкторією. У такому разі плоскі пружні елементи гратчастого торсіона практично не сприймають значних навантажень, а найнавантаженишим елементом є центральний циліндричний торсіон.

Враховуючи ці міркування, за умови, що на центральний циліндричний торсіон припадає більша частка жорсткості, пропонується така послідовність підбору комбінованої пружної системи.

Спочатку визначаємо мінімальну допустиму довжину центрального циліндричного торсіона. Для цього формулу (50) перепишемо так:

$$c_{кр} = (1 - \zeta)c_{кр} + \zeta \cdot c_{кр}, \quad (51)$$

де  $\zeta$  – частка сумарної жорсткості  $c_{кр}$ , яка припадає на центральний циліндричний торсіон. Конструктивно, як вказано вище, на практиці приймають частку  $\zeta$  в околі значення  $\zeta = 0.9$  [2, 3]. Тоді врахувавши значення жорсткості торсіона на кручення  $c_{закт}$  (24), вираз для знаходження жорсткості, що припадає на центральний циліндричний торсіон, набуде вигляду

$$c_{кр} \cdot \zeta = \frac{GJ_p}{l_m}. \quad (52)$$

З формули (52), враховуючи значення  $J_p$ , діаметр  $d_m$  центрального циліндричного торсіона визначається як:

$$d_m = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot c_{кр} \cdot \zeta \cdot l_m}{G\pi}}. \quad (53)$$

Підставляючи (53) в (49), можна отримати вираз для мінімальної довжини центрального циліндричного торсіона

$$l_{m\min} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot c_{кр} \cdot \zeta \cdot G^3 \cdot \varphi^4}{\pi \cdot [\tau_{-1}]^4}}. \quad (54)$$

Отже, вибравши  $l_m \geq l_{m\min}$ , підставляємо це значення в (53) і знаходимо діаметр  $d_m$  центрального циліндричного торсіона, який для заданих величин  $l_m$  та  $d_m$  матиме жорсткість  $c_{кр} \cdot \zeta$ . Подальші розрахунки можна виконувати за формулою (33) та конструктивно заданій величині  $l_c$ , або ж за видозміненою формулою (32) з урахуванням (51):

$$b = \sqrt[4]{\frac{c_{кр}(1 - \zeta)}{\frac{En\gamma}{l_c} \left[ \frac{R^2 \cos^2 \alpha}{l_c^2 \cos^2 \psi} + \frac{\gamma^2 \sin^2 \psi}{12} + \frac{G\beta \cos^2 \psi}{E} \right]}}. \quad (55)$$

Знайшовши за цими формулами значення  $b$ , сумарна жорсткість на кручення комбінованої пружної системи становитиме  $c_{кр}$ , а частка сумарної жорсткості на кручення гратчастого торсіона  $(1 - \zeta)$ .

За умови, якщо більшу частку жорсткості сприймає гратчастий торсіон, можна використовувати для визначення  $b$  вираз (55). Для знаходження мінімальної довжини плоского пружного елемента  $l_{c\min}$  потрібно у (43) підставити значення  $b$  з (55) та за відомих параметрів, що входять у ці вирази, числовим способом знайти можливі мінімальні значення  $l_{c\min}$ . Після цього з умови  $l_c \geq l_{c\min}$  за (55) знаходиться  $b$ , а за (53) знаходиться  $d_m$  для конструктивно заданого параметра  $l_m$ .

Для  $[\tau_{-1}] = 300 \text{ МПа}$ ,  $R = 80 \text{ мм}$ ,  $n = 12$ ,  $l_m = 0.362 \text{ м}$ ,  $\psi = 0$ ,  $l_c = 0.332 \text{ м}$ ,  $\gamma = 3$  та параметрах системи, наведених вище, побудовано графічні залежності (рис. 7), з яких очевидно, що при значеннях  $\zeta = 0.97 \dots 1$ , величини  $b$  та  $h$  різко падають. Це означає, що зміна розмірів сторін  $b$  та  $h$  плоских пружних елементів на міліметри (близько 30 % від номінального розміру), в сторону зменшення, для наведеної пружної системи, не вплине істотно на сумарну жорсткість комбінованої пружної системи. Також бачимо, що зміна  $b$  від 0 до 6 мм, а  $h$  від 0 до 20 мм (відповідає частці  $\zeta = 0.97 \dots 1$ ) залишає майже без змін  $d$  на позначці близько 72 мм (рис. 7, б).

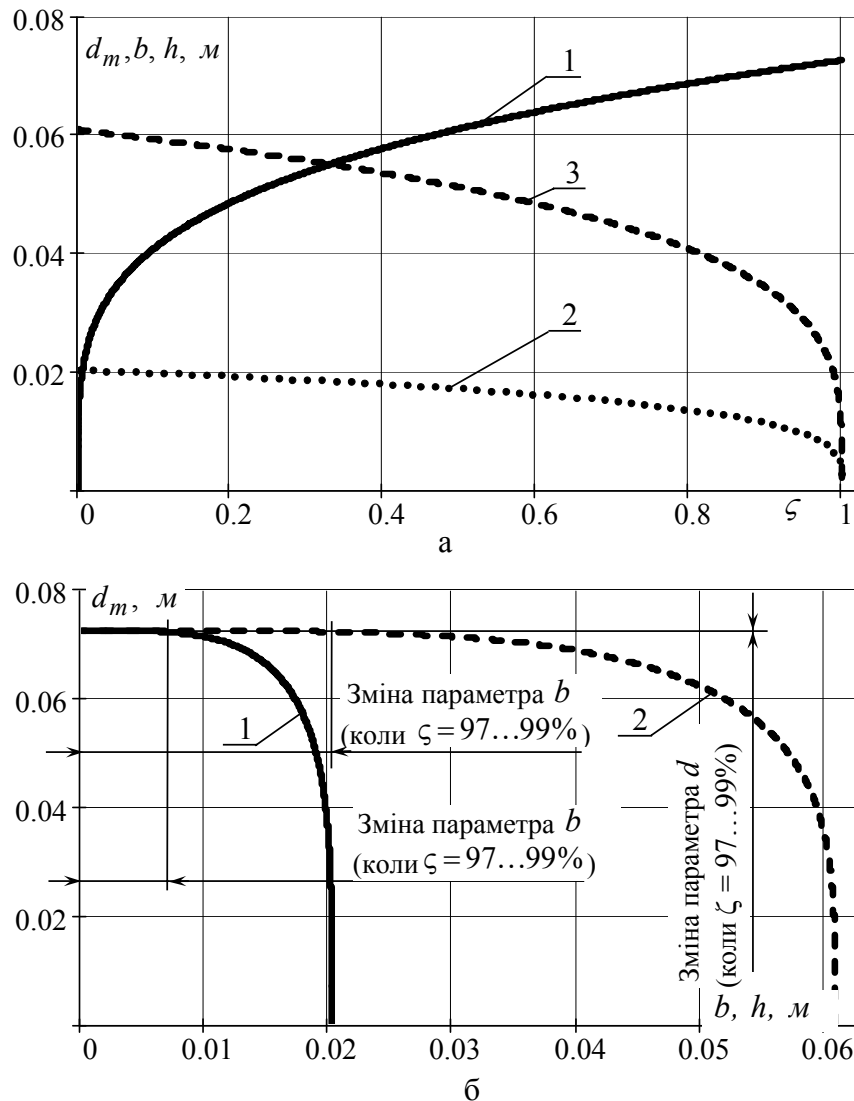


Рис. 7. Залежності діаметра  $d_m$  циліндричного торсіона (1), товщини  $b$  (2) та ширини  $h$  (3) пружного стрижня ґратчастого торсіона від частки  $\zeta$  (а) та залежності  $d_m$  від  $b$  (1) та від  $h$  (2) (б)

Отже, у розрахунках параметрів МКС потрібно передбачити умови, за яких не виникнуть так звані паразитні (вертикальні) коливання, і тоді під час виготовлення плоских пружних елементів ґратчастого торсіона, для  $\zeta = 0.97...0.99$ , можна не висувати високих вимог до точності їх геометричних параметрів і навіть до точності позиціонування. Це спрощує виготовлення комбінованої пружної системи. Своєю чергою, якщо  $\zeta = 0...0.03$ , тобто коли центральний циліндричний торсіон сприймає менше 3% сумарної жорсткості  $c_{кр}$  комбінованої пружної системи, незначна зміна діаметра центрального торсіона  $d$  практично не впливає на його сумарну жорсткість. Отже, вимоги до точності виготовлення центрального циліндричного торсіона можуть бути не надто високими.

б) *Рекомендації щодо розрахунку за умови однакового ресурсу роботи пружних елементів ґратчастого та центрального циліндричного торсіонів.* Як і в пункті а) конструктивно (згідно з рекомендаціями) вибираємо частку  $\zeta$  сумарної жорсткості  $c_{кр}$  комбінованої пружної системи, що припадає на центральний циліндричний торсіон. Крім цього у розрахунок вводиться  $\zeta_n$  – частка допустимих напружень на витривалість за циклічних навантажень, яка буде однаковою як для ґратчастого, так і для циліндричного торсіонів. Цим забезпечується однаковий ресурс роботи пружних елементів.

У такому разі формула (53) залишається без змін, а (54), за умови, що  $\tau_{\max} = \zeta_n[\tau_{-1}]$ , перепишемо так:

$$l_{m\min} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot c_{кр} \cdot \zeta \cdot G^3 \cdot \varphi^4}{\pi \cdot \zeta_n^4 \cdot [\tau_{-1}]^4}}. \quad (56)$$

Вибравши  $l_m = l_{m\min}$ , підставляємо це значення в (53) і знаходимо діаметр  $d_m$  центрального циліндричного торсіона. Приймаючи  $\sigma_{\max} = \zeta_n[\sigma_{-1}]$ , з формули (43) формується аналітичний вираз для визначення  $b$ . Прирівнявши отриманий вираз та вираз (33), або (55), для відомих решта параметрів, що входять у ці вирази, числовими способами знаходяться можливі значення  $l_c$ , після чого з (33), або з (55), визначаємо товщину  $b$ . Такий розрахунок дає змогу забезпечити теоретично однаковий ресурс роботи двох пружних систем: центральної циліндричної та гратчастої, як складових комбінованої пружної системи.

**Висновки.** 1. Встановлено, що загальним випадком пружної системи для забезпечення простого руху робочого органа вібраційної машини є комбінована пружна система у вигляді гратчастого торсіона з похило розташованими плоскими пружними елементами та центрального циліндричного торсіона. Це дозволило зробити узагальнення низки розрахунків пружних систем та запропонувати формули-шаблон розрахунків на жорсткість (31) та міцність (45), які забезпечують глибинніше розуміння фізики процесів, що відбуваються в таких системах. Розбіжність розрахунку на жорсткість за формулою-шаблоном порівняно з методом скінченних елементів становить 1.5 %, на міцність дещо вище, що насамперед пов'язано з неврахуванням концентраторів напружень.

2. Наведена формула-шаблон розрахунку жорсткості пружних систем вібраційних машин, в яких робочий орган здійснює простий рух, охоплює більше десяти випадків комбінації пружних систем. Ця формула-шаблон підкреслює єдність процесів деформації у вібраційних машинах з прямолінійним та обертальним рухом робочого органа, що дозволило звести розрахунки жорсткості таких пружних систем в одну аналітичну формулу-шаблон. Цю шаблон-формулу зручно використовувати під час розрахунків вібраційних машин інженерним персоналом та студентами в навчальному процесі.

3. Запропонована і повністю викладена методика розрахунку на жорсткість і міцність комбінованої пружної системи, як узагальнюючої, дає можливість широкого аналізу, оптимізації та подальшого удосконалення конструкції таких систем. Встановлено, що для крутильних та гвинтоподібних коливань під час виготовлення плоских пружних елементів гратчастого торсіона з часткою  $\zeta = 0.97 \dots 0.99$  від сумарної жорсткості комбінованої пружної системи, яка припадає на центральний циліндричний торсіон, можна не висувати високих вимог до їх геометричних параметрів і навіть до точності позиціонування. Це значно спрощує та здешевлює виготовлення комбінованої пружної системи.

1. Рабинович А.Н., Яхимович В.А., Боечко Б.Ю. Автоматические загрузочные устройства вибрационного типа. – К.: Техника, 1965. 2. Повідайло В.О. Вібраційні процеси та обладнання: Навч. посібник. – Львів: Вид-во Нац. ун-ту “Львівська політехніка”, 2004. – 248 с. 3. Повідайло В.А., Щигель В.А. Конструкция и расчет вибрационных бункерных питателей с гиперболическим решатчатым торсионом // Автоматизация производственных процессов в машиностроении и приборостроении. – Львов: Изд-во Львовского университета, 1972. – Вып. 12. – С. 115–122. 4. Шпак Я.В., Ланець О.С. Розрахунок, рекомендації щодо вибору конструктивних параметрів та перевірка роботоздатності комбінованої пружної системи вібраційної притиральної машини // Вибрації в техніці та технологіях. – Вінниця: 2005. – № 1. – С. 63–72. 5. Гаврильченко О.В., Ланець О.С., Шпак Я.В. Методика розрахунку комбінованої вертикальної пружної системи резонансної вібраційної притиральної машини з кутовими коливаннями притиру // Машинознавство. – 2004. – № 2(80). – С. 36–41.