УДК 621.313

В.М. Гладкий
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра ЕМА

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ АСИНХРОННОГО ДВИГУНА З УРАХУВАННЯМ СКОСУ ПАЗІВ РОТОРА

Опрацьовано математичну модель асинхронного двигуна з урахуванням скосу пазів ротора. Модель базується на розрахунку одновимірного магнітного поля з урахуванням вищих просторових гармонік магніторушійних сил та насичення основного магнітного кола, алгебризації диференційних рівнянь методом ФДН g-го порядку та розв’язуванні нелінійної системи алгебричних рівнянь методом Ньютона.

Ключові слова: **асинхронний двигун, математична модель, скіс пазів ротора, насичення основного магнітного кола, вищі гармоніки** МРС.

A mathematical model for asynchronous motor taking into account rotor teeth skew has been developed. The model is based on magnetic field computation allowing for core saturation and magnetomotive forces spatial harmonics, differential equations algebrization with the g-th order backward differentiation formula and nonlinear algebraic equations system solving with Newton’s method.

Key words: **asynchronous motor, mathematical model, rotor teeth skew, core saturation, MMF spatial harmonics.**

Постановка проблеми

Асинхронні двигуни є основними споживачами електричної енергії у промисловості, сільському господарстві і їх широко використовують для приводу більшості промислових механізмів, тому дослідженню процесів в асинхронних двигунах шляхом математичного моделювання моделей завжди приділялася значна увага.

Як відомо, в асинхронних двигунах пази ротора скошують на одну зубцеву поділку. Отже, зменшується шкідливий вплив вищих гармонік на криву моменту, зменшуються електромагнітні вібрації і шуми, зменшуються синхронні моменти.

Хоча скіс пазів є доволі поширеним, дослідженню його впливу на роботу машини та її параметри приділяється недостатньо уваги.

Аналіз останніх досліджень

Проведений аналіз літератури свідчить, що врахуванню скосу пазів ротора на поведінку асинхронної машини у перехідних процесах практично не приділяється увага [2], а більшість статей присвячена врахуванню додаткових втрат чи поперечних струмів ротора [6].

Задачі досліджень

Задачею цього дослідження є розроблення математичної моделі асинхронного двигуна з урахуванням скосу пазів ротора з урахуванням насичення основного магнітного кола та вищих просторових гармонік магніторушійних сил у їхньому взаємозв’язку.

Виклад основного матеріалу

Розглянемо асинхронний двигун з клітковим ротором, на статорі якого розміщено s обмоток, розподілених по пазах довільно, а ротор має r стрижнів, скошених на одну зубцеву поділку t_{zp}.

Створення математичної моделі асинхронного двигуна з урахуванням скосу пазів ротора базуватиметься на таких допущеннях:

1. Гістерезис і вихрові струми відсутні.

2. Магнітне поле плоскопаралельне.

3. Магнітне поле машини розділене на робоче поле й поля розсіяння, причому останні вважаються лінійними однорідними функціями струмів обмоток.

4. Магнітні поля в ярмах статора й ротора мають лише тангенціальну складову.

5. Зубцеві шари статора і ротора замінені еквівалентними шарами, які у радіальному напрямі мають характеристику намагнічування, еквівалентну до реального зубцевого шару, а в тангенціальному напрямі – нескінченний магнітний опір.

6. Обмотки статора й ротора замінені винесеними до повітряного проміжку нескінченно тонкими шарами й представлені кутовими розподілами густин провідників відповідних фаз.

Перетнемо магнітопровід машини m площинами, перпендикулярними до осі обертання ротора, вважаючи незмінним розподіл поля в осьовому напрямку поміж двома сусідніми площинами.

Згідно з прийнятими допущеннями рівняння, які описують розподіл магнітного поля при заданих струмах статора й ротора та куті повороту ротора для i-го перетину ($i = 1,\ldots,m$), мають вигляд [5]:

$$
\begin{gathered}
\frac{dF_i}{d\alpha_м} - \frac{r_c}{p_м} H_{ci} + \frac{r_p}{p_м} H_{pi} + \vec{n}_{ст}(\alpha_м)\vec{i}_c / a_c + \vec{n}_{pтi}(\beta_{мi})\vec{i}_p / a_p = 0\,; \\
\frac{r_c}{p_м}\int_0^{2\pi} H_{ci}\,d\alpha_м - \int_0^{2\pi} \vec{n}_{ст}(\alpha_м)\vec{i}_c\,d\alpha_м / a_c - \int_0^{2\pi} \vec{n}_{pтi}(\beta_{мi})\vec{i}_p\,d\alpha_м / a_p = 0\,; \\
B_{\delta i} = \frac{1}{c_c}\frac{dB_{ci}}{d\alpha_м}; \quad B_{pi} = B_{пi} - cB_{ci}\,; \\
\beta_{мi} = \alpha_м - p_м\gamma + \frac{t_{zp}}{m}(i-1)\,; \\
F_i = F_i(B_{\delta i})\,; \quad H_{ci} = H_{ci}(B_{ci})\,; \quad H_{pi} = H_{pi}(B_{pi})\,,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

де $\vec{i}_c = [i_{c1} \ \ldots \ i_{cs}]_т$; $\vec{i}_p = [i_{p1} \ \ldots \ i_{pr}]_т$ – вектор струмів фаз статора й ротора відповідно; $\vec{n}_c(\alpha_м) = [n_{c1}(\alpha_м) \ \ldots \ n_{cs}(\alpha_м)]_т$; $\vec{n}_{pi}(\beta_м) = [n_{p1,i}(\beta_м) \ \ldots \ n_{pr,i}(\beta_м)]_т$ – вектор кутових густин провідників фаз статора й ротора відповідно в i-му перетині (тут і надалі нижній індекс „i” вказуватиме на належність величини до i-го перетину вздовж осі машини; a_c, a_p – відповідно кількості паралельних гілок фаз статора й ротора; $\alpha_м$ – магнітний кут нахилу променя, який проходить через вісь обертання машини й довільну точку A на розточці статора, до прийнятого нерухомого відносно статора променя OX_c; $\beta_{мi}$ – магнітний кут нахилу променя, який проходить через вісь обертання машини й точку A, до прийнятого нерухомого відносно ротора променя OX_p; $p_м\gamma$ – магнітний кут нахилу променя OX_p до променя OX_c, який ототожнюємо з магнітним кутом повороту машини; $p_м$ – кількість періодів магнітного поля вздовж розточки статора машини; B_{ci}, B_{pi}, H_{ci}, H_{pi} – магнітні індукції та напруженості магнітного поля в ярмах статора й ротора відповідно; $B_{\delta i}$ – магнітна індукція в повітряному проміжку; F_i – магнітна напруга еквівалентного шару; $B_{пi}$ – деяка магнітна індукція, що не залежить від координати $\alpha_м$; k_δ – коефіцієнт Картера; r_c – радіус кола, що проходить через середину ярма статора; r_p – радіус кола, що проходить через середину ярма ротора; c, c_c – постійні коефіцієнти, які обчислюють за формулами $c = h_c l_c k_c / (h_p l_p k_p)$, $c_c = \frac{l_\delta r_\delta}{p_м h_c l_c k_c}$, у яких h_c – висота ярма статора; h_p – висота ярма ротора; l_c – довжина осердя статора; l_p – довжина осердя ротора; k_c – коефіцієнт заповнення сталі статора; k_p – коефіцієнт заповнення сталі ротора, r_δ – радіус кола, яке проходить через середину повітряного проміжку, l_δ – розрахункова довжина машини.

Нижній індекс „т” тут і надалі означає транспонування.

Доповнимо (1) формулами для обчислення потокозчеплень та електромагнітного моменту двигуна [4]

$$\vec{\psi}_c = L_{\sigma c}\vec{i}_c + \frac{r_\delta}{p_м c_c a_c}\int_0^{l_\delta}\int_0^{2\pi}\vec{n}_c(\alpha_м)B_c d\alpha_м dl_\delta\,; \quad \vec{\psi}_p = L_{\sigma p}\vec{i}_p + \frac{r_\delta}{p_м c_p a_p}\int_0^{l_\delta}\int_0^{2\pi}\vec{n}_p(\beta_м)B_c d\alpha_м dl_\delta\,; \tag{2}$$

$$M = -\frac{p_м r_\delta}{a_c}\int_0^{l_\delta}\int_0^{2\pi}\vec{i}_{cт}\vec{n}_c(\alpha_м)B_\delta d\alpha_м dl_\delta\,, \tag{3}$$

де

$$L_{\sigma c} = \begin{bmatrix} L_{\sigma c1c1} & \cdots & L_{\sigma c1cs} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{\sigma csc1} & \cdots & L_{\sigma cscs}\end{bmatrix};\quad L_{\sigma p} = \begin{bmatrix} L_{\sigma p1p1} & \cdots & L_{\sigma p1pr} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{\sigma prp1} & \cdots & L_{\sigma prpr}\end{bmatrix}$$

– стала матриця індуктивностей розсіяння фаз статора й ротора відповідно;

$$\vec{\psi}_c = [\psi_{c1} \ \ \ldots \ \ \psi_{cs}]_т\,;\quad \vec{\psi}_p = [\psi_{p1} \ \ \ldots \ \ \psi_{pr}]_т$$

– вектори потокозчеплень фаз статора й ротора відповідно.

Система рівнянь (1)–(3) являє собою магнітно-механічну характеристику двигуна на континуальному рівні [1], у якій рівняння (1) описують двоточкову диференційну крайову задачу розрахунку магнітного поля і в якій невідомі B_{ci}, H_{ci}, B_{pi}, H_{pi}, $B_{\delta i}$, F_i задовольняють крайову умову

$$B_{ci}(\alpha_м) = B_{ci}(\alpha_м + 2\pi)\,;\ H_{ci}(\alpha_м) = H_{ci}(\alpha_м + 2\pi)\,;\ B_{pi}(\alpha_м) = B_{pi}(\alpha_м + 2\pi)\,;$$
$$H_{pi}(\alpha_м) = H_{pi}(\alpha_м + 2\pi)\,;\ B_{\delta i}(\alpha_м) = B_{\delta i}(\alpha_м + 2\pi)\,;\quad F_i(\alpha_м) = F_i(\alpha_м + 2\pi).$$

Доповнимо (1) – (3) рівняннями електричного стану

$$d\vec{\psi}_c / dt + R_c\vec{i}_c - \vec{u}_c = 0\,;\quad d\vec{\psi}_p / dt + R_p\vec{i}_p = 0 \tag{4}$$

та рівняннями механічного стану

$$M + M_в - J\cdot d\omega/dt = 0\,;\quad \omega = d\gamma/dt\,, \tag{5}$$

де $R_c = \mathrm{diag}(R_{c1},\ldots,R_{cs})$; $R_p = \mathrm{diag}(R_{p1},\ldots,R_{pr})$ – матриця опорів фаз статора й ротора відповідно; $\vec{\psi}_c = [\psi_{c1} \ \ldots \ \psi_{cs}]_т$; $\vec{\psi}_p = [\psi_{p1} \ \ldots \ \psi_{pr}]_т$ – вектори потокозчеплень фаз статора й ротора відповідно; $\vec{u}_c = [u_{c1} \ \ldots \ u_{cs}]_т$ – вектор напруг фаз статора як відомих функцій часу; J – момент інерції обертових мас; $M_в$ – момент на валу як відома функція часу; ω – кутова швидкість ротора.

Система рівнянь (1)–(5) за початкової умови

$$t = t_0\,;\quad \vec{i}_c = \vec{i}_{c0}\,;\quad \vec{i}_p = \vec{i}_{p0}\,;\quad \gamma = \gamma_0\,;\quad \omega = \omega_0$$

представляє задачу Коші, розв’язком якої є сукупність залежностей $\vec{i}_c$, $\vec{i}_p$, γ, β_{Mi}, $B_{пi}$, B_{ci}, H_{ci}, B_{pi}, H_{pi}, $B_{\delta i}$, $F_{\delta i}$, F_{zi}, $\vec{\psi}_c$, $\vec{\psi}_p$, M, ω від часу, які будуть відображати обчислюваний електромеханічний перехідний процес.

Розв’язуватимемо систему рівнянь (1)–(3) методом тригонометричної колокації [3], у якому алгебризація рівнянь зводиться до формальної заміни усіх функцій аргументу $\alpha_М$ векторами їх дискрет (тобто значеннями функції у вузлах накладеної вздовж періоду магнітного поля сітки з $N = 1 + 2n$ вузлами, де n – ціле число), диференційного оператора $\frac{d}{d\alpha_М}$ – його дискретним аналогом

$$Д=\frac{2}{N}\begin{bmatrix}\sum_{\nu=1}^{n}\nu\sin(\nu(\alpha_{м1}-\alpha_{м1})) & \ldots & \sum_{\nu=1}^{n}\nu\sin(\nu(\alpha_{м1}-\alpha_{мN}))\\ \vdots & & \vdots\\ \sum_{\nu=1}^{n}\nu\sin(\nu(\alpha_{мN}-\alpha_{м1})) & \ldots & \sum_{\nu=1}^{n}\nu\sin(\nu(\alpha_{мN}-\alpha_{мN}))\end{bmatrix},$$

а інтегрального оператора $\int_0^{2\pi}\cdot\, d\alpha_м$ – його алгебричним аналогом $\vec{I}_G=\frac{2\pi}{N}\left[\underbrace{1\ \ \ldots\ \ 1}_{N}\right]$.

Застосувавши ці правила до системи рівнянь (1) – (3), отримуємо її дискретний аналог у вигляді нелінійної системи алгебричних рівнянь

$$Д\vec{F}_{дi}-\frac{r_c}{p_м}\vec{H}_{сдi}+\frac{r_p}{p_м}\vec{H}_{рдi}+n_{сдт}\vec{i}_c/a_c+n_{рдтi}(\vec{\beta}_{мдi})\vec{i}_p/a_p=0;$$

$$\vec{I}_G(\frac{r_c}{p_м}\vec{H}_{сдi}-n_{сдт}\vec{i}_c/a_c-n_{рдтi}(\vec{\beta}_{мдi})\vec{i}_p/a_p)=0;$$

$$\vec{B}_{\delta дi}=\frac{1}{c_c}Д\vec{B}_{сдi};\quad \vec{B}_{рдi}=\vec{c}_1 B_{пi}-c\vec{B}_{сдi};\tag{6}$$

$$\vec{\beta}_{мдi}=\vec{\alpha}_{мдi}-\vec{c}_1(p_м\gamma-\frac{t_{zp}}{m}(i-1));$$

$$\vec{F}_{дi}=\vec{F}_{дi}(\vec{B}_{\delta дi});\quad \vec{H}_{сдi}=\vec{H}_{сдi}(\vec{B}_{сдi});\quad \vec{H}_{рдi}=\vec{H}_{рдi}(\vec{B}_{рдi});$$

$$\vec{\psi}_c=L_{\sigma c}\vec{i}_c+\frac{2\pi}{N}\frac{r_\delta}{p_м c_c a_c}\int_0^{l_\delta}n_{сд}\vec{B}_{сд}dl_\delta;\quad \vec{\psi}_p=L_{\sigma p}\vec{i}_p+\frac{2\pi}{N}\frac{r_\delta}{p_м c_p a_p}\int_0^{l_\delta}n_{рд}\vec{B}_{сд}dl_\delta\tag{7}$$

$$M=-\frac{2\pi}{N}\frac{p_м r_\delta}{a_c}\int_0^{l_\delta}\vec{i}_{ст}n_{сд}\vec{B}_{\delta д}dl_\delta,\tag{8}$$

де

$$n_{сд}=\begin{bmatrix}n_{c1,д1} & \cdots & n_{c1,дN}\\ \vdots & & \vdots\\ n_{cs,д1} & \cdots & n_{cs,дN}\end{bmatrix};\quad n_{рд}=\begin{bmatrix}n_{p1,д1} & \cdots & n_{p1,дN}\\ \vdots & & \vdots\\ n_{pr,д1} & \cdots & n_{pr,дN}\end{bmatrix}$$

– матриця дискрет кутових густин провідників фаз статора й ротора відповідно;
$\vec{F}_{дi}=\left[F_{1,i}\ \ \ldots\ \ F_{N,i}\right]_т$ – вектор дискрет відповідно магнітної напруги еквівалентного шару; $\vec{B}_{\delta дi}=\left[B_{\delta 1,i}\ \ \ldots\ \ B_{\delta N,i}\right]_т$ – вектор дискрет магнітної індукції в повітряному проміжку; $\vec{B}_{сдi}=\left[B_{c1,i}\ \ \ldots\ \ B_{cN,i}\right]_т$, $\vec{B}_{рдi}=\left[B_{p1,i}\ \ \ldots\ \ B_{pN,i}\right]_т$ – вектор дискрет відповідно магнітної індукції ярма статора та магнітної індукції ярма ротора; $\vec{H}_{сдi}=\left[H_{c1,i}\ \ \ldots\ \ H_{cN,i}\right]_т$, $\vec{H}_{рдi}=\left[H_{p1,i}\ \ \ldots\ \ H_{pN,i}\right]_т$ – вектор дискрет відповідно напруженості магнітного поля в ярмі статора та напруженості магнітного поля в ярмі ротора; $\vec{c}_1=[1\ \ \ldots\ \ 1]_т$ – матриця-стовпець розміру N; $\vec{\alpha}_{мд}=\left[\alpha_{м1}\ \ \ldots\ \ \alpha_{мN}\right]_т$ – стовпець дискрет кутової координати $\alpha_м$ накладеної вздовж періоду магнітного поля сітки; $\vec{\beta}_{мд}=\left[\beta_{м1}\ \ \ldots\ \ \beta_{мN}\right]_т$ – стовпець дискрет кутової координати $\beta_м$.

Утворивши такі матриці та вектори:
$Д_t=\mathrm{diag}(Д, Д,\ldots, Д)$ – діагональна матриця розміру mN; $\vec{F}_{дt}=\left[\vec{F}_{Д1}\ \ \ldots\ \ \vec{F}_{дm}\right]_т$ – вектор дискрет магнітної напруги еквівалентного шару в усіх перетинах вздовж довжини машини; $\vec{H}_{сдt}=\left[\vec{H}_{сд1}\ \ \ldots\ \ \vec{H}_{сдm}\right]_т$ –

вектор дискрет напруженості магнітного поля у ярмі статора в усіх перетинах вздовж довжини машини; $\vec{H}_{рдт} = \left[\vec{H}_{рд1} \quad ... \quad \vec{H}_{рдm}\right]_т$ – вектор дискрет напруженості магнітного поля у ярмі ротора в усіх перетинах вздовж довжини машини; $n_{сдт} = \left[n_{сд} \quad ... \quad n_{сд}\right]$ – матриця, яка містить m матриць $n_{сд}$; $n_{рдт} = \left[n_{рд1} \quad ... \quad n_{рдm}\right]$ – матриця, яка містить m матриць $n_{рд}$; $\vec{I}_{Gt} = \mathrm{diag}(\vec{I}_G, \vec{I}_G, ..., \vec{I}_G)$ – діагональна матриця розміру m; $\vec{B}_{\delta дт} = \left[\vec{B}_{\delta д1} \quad ... \quad \vec{B}_{\delta дm}\right]_т$ – вектор дискрет магнітної індукції в повітряному проміжку в усіх перетинах вздовж довжини машини; $\vec{B}_{сдт} = \left[\vec{B}_{сд1} \quad ... \quad \vec{B}_{сдm}\right]_т$ – вектор дискрет магнітної індукції в ярмі статора в усіх перетинах вздовж довжини машини; $\vec{B}_{рдт} = \left[\vec{B}_{рд1} \quad ... \quad \vec{B}_{рдm}\right]_т$ – вектор дискрет магнітної індукції в ярмі ротора в усіх перетинах вздовж довжини машини; $\vec{B}_{пт} = \left[\vec{B}_{п1} \quad ... \quad \vec{B}_{пm}\right]_т$ – вектор магнітної індукції $B_п$ в усіх перетинах вздовж довжини машини; $\vec{c}_{1t} = \left[\vec{c}_1 \quad \ldots \quad \vec{c}_1\right]_т$ – матриця-стовпець розміру Nm; $\vec{\alpha}_{мдт} = \left[\vec{\alpha}_{мд} \quad ... \quad \vec{\alpha}_{мд}\right]_т$ – вектор дискрет кутової координати $\alpha_м$ в усіх перетинах; $\vec{\beta}_{мдт} = \left[\vec{\beta}_{мд1} \quad ... \quad \vec{\beta}_{мдm}\right]_т$ – вектор дискрет кутової координати $\beta_м$ в усіх перетинах, та обчисливши інтеграли у (7), (8) за формулою прямокутників, отримуємо систему рівнянь (6) – (8) у векторному вигляді

$$Д_t\vec{F}_{дт} - \frac{r_c}{p_м}\vec{H}_{сдт} + \frac{r_p}{p_м}\vec{H}_{рдт} + n_{сдтт}\vec{i}_c / a_c + n_{рдтт}(\vec{\beta}_{мдт})\vec{i}_p / a_p = 0\,;$$

$$\vec{I}_{Gt}(\frac{r_c}{p_м}\vec{H}_{сдт} - n_{сдтт}\vec{i}_c / a_c - n_{рдтт}(\vec{\beta}_{мдт})\vec{i}_p / a_p) = 0\,;$$

$$\vec{B}_{\delta дт} = \frac{1}{c_c}Д_t\vec{B}_{сдт}\,; \qquad \vec{B}_{рдт} = \vec{c}_{1t}B_{пт} - c\vec{B}_{сдт}\,; \tag{9}$$

$$\vec{\beta}_{мдт} = \vec{\alpha}_{мдт} - \vec{c}_{1t}(p_м\gamma - \frac{t_{zp}}{m}(i-1))$$

$$\vec{F}_{дт} = \vec{F}_{дт}(\vec{B}_{\delta дт})\,; \qquad \vec{H}_{сдт} = \vec{H}_{сдт}(\vec{B}_{сдт})\,; \qquad \vec{H}_{рдт} = \vec{H}_{рдт}(\vec{B}_{рдт})\,,$$

$$\vec{\psi}_c = L_{\sigma c}\vec{i}_c + \frac{2\pi}{N}\frac{r_\delta}{p_м c_c a_c}\frac{l_\delta}{m}n_{сдт}\vec{B}_{сдт}\,; \qquad \vec{\psi}_p = L_{\sigma p}\vec{i}_p + \frac{2\pi}{N}\frac{r_\delta}{p_м c_p a_p}\frac{l_\delta}{m}n_{рдт}(\vec{\beta}_{мдт})\vec{B}_{сдт}\,;$$

$$M = -\frac{2\pi}{N}\frac{p_м r_\delta}{a_c}\frac{l_\delta}{m}\vec{i}_{ст}n_{сдт}\vec{B}_{\delta дт}.$$

До інтегрування нелінійної САР (4), (5), (9), яка описує електромеханічні перехідні процеси в асинхронному двигуні з урахуванням скосу пазів ротора при розрахунку його магнітного поля методом тригонометричної колокації, застосуємо метод ФДН.

Алгебризувавши похідні в диференційних рівняннях (4), (5) за формулою диференціювання назад g-го порядку, отримуємо алгебричні рівняння

$$b\vec{\psi}_c + \sum_{j=1}^{g} b_j\vec{\psi}_{cj} + R_c\vec{i}_c - \vec{u}_c = 0\,; \qquad b\vec{\psi}_p + \sum_{j=1}^{g} b_j\vec{\psi}_{pj} + R_p\vec{i}_p = 0\,; \tag{10}$$

$$M + M_в - J(b\omega + \sum_{j=1}^{g} b_j\omega_j) = 0\,; \qquad \omega = b\gamma + \sum_{j=1}^{g} b_j\gamma_j\,, \tag{11}$$

де $\vec{i}_c$, $\vec{i}_p$, γ, $\vec{\psi}_c$, $\vec{\psi}_p$, M, ω – невідомі значення змінних стану в моменті t; $\vec{u}_c$, $\vec{u}_p$, $M_в$ – відомі значення вимушуючих сил у моменті t; γ_j, $\vec{\psi}_{cj}$, $\vec{\psi}_{pj}$, ω_j – обчислені на попередніх g кроках інтегрування значення змінних γ, $\vec{\psi}_\text{с}$, $\vec{\psi}_\text{р}$, ω в моментах $t_g < t_{g-1} < \ldots < t_1$; b, b_j (j=1,...,g) – коефіцієнти, що визначаються сукупністю значень t, $t_1, \ldots, t_g$.

Система алгебричних рівнянь (9) – (11) складається з 15 рівнянь і містить значення невідомих $\vec{i}_\text{с}$, $\vec{i}_\text{р}$, γ, $\vec{B}_\text{пt}$, $\vec{B}_\text{сдt}$, $\vec{H}_\text{сдt}$, $\vec{B}_\text{рдt}$, $\vec{H}_\text{рдt}$, $\vec{B}_{\delta\text{дt}}$, $\vec{F}_\text{дt}$, $\vec{\psi}_\text{с}$, $\vec{\psi}_\text{р}$, M, ω, $\vec{\beta}_\text{мдt}$ у моменті t. До її розв'язування застосуємо метод Ньютона.

Лінеаризована система рівнянь (9) – (11) на *i*-й ітерації методу Ньютона зводиться до вигляду

$$A^{\langle i-1\rangle}\Delta\vec{X}_\text{п}^{\langle i\rangle} = -\vec{f}^{\langle i-1\rangle}, \tag{12}$$

де $\vec{f}^{\langle i-1\rangle}$, $A^{\langle i-1\rangle}$ – значення вектора нев'язок $\vec{f} = \begin{bmatrix}\vec{f}_\text{м1} & f_\text{м2} & \vec{f}_\text{с} & \vec{f}_\text{р} & f_\text{м}\end{bmatrix}_\text{т}$ і матриці

$$A = \begin{bmatrix}
\dfrac{n_\text{сдtт}}{a_\text{с}} & \dfrac{n_\text{рдtт}(\vec{\beta}_\text{мдt})}{a_\text{р}} & -\dfrac{p_\text{м}n'_\text{рдtт}(\vec{\beta}_\text{мдt})\vec{c}_{1t}\vec{i}_\text{р}}{a_\text{р}} & \dfrac{r_\text{р}}{p_\text{м}}\nu_\text{рдt}\vec{c}_{1t} & \begin{matrix}Д_t\dfrac{\rho_{\delta\text{дt}}}{c_\text{с}}Д_t - \\ -\dfrac{r_\text{с}}{p_\text{м}}\nu_\text{сдt} - \dfrac{cr_\text{р}}{p_\text{м}}\nu_\text{рдt}\end{matrix} \\
-\dfrac{\vec{I}_{Gt}n_\text{сдtт}}{a_\text{с}} & -\dfrac{\vec{I}_{Gt}n_\text{рдtт}(\vec{\beta}_\text{мдt})}{a_\text{р}} & \dfrac{\vec{I}_{Gt}p_\text{м}n'_\text{рдtт}(\vec{\beta}_\text{мдt})\vec{c}_{1t}\vec{i}_\text{р}}{a_\text{р}} & 0 & \dfrac{r_\text{с}}{p_\text{м}}\vec{I}_{Gt}\nu_\text{сдt} \\
bL_{\sigma\text{с}} + R_\text{с} & 0 & 0 & 0 & \dfrac{2\pi}{N}\dfrac{r_\delta b}{p_\text{м}c_\text{с}a_\text{с}}\dfrac{l_\delta}{m}n_\text{сдt} \\
0 & bL_{\sigma\text{р}} + R_\text{р} & \begin{matrix}-bp_\text{м}\dfrac{2\pi}{N}\dfrac{r_\delta}{p_\text{м}c_\text{р}a_\text{р}}\times \\ \times\dfrac{l_\delta}{m}n'_\text{рдt}(\vec{\beta}_\text{мдt})\vec{c}_{1t}\vec{B}_\text{сд}\end{matrix} & 0 & \dfrac{2\pi}{N}\dfrac{r_\delta b}{p_\text{м}c_\text{р}a_\text{р}}\dfrac{l_\delta}{m}n_\text{рдt}(\vec{\beta}_\text{мдt}) \\
\begin{matrix}-\dfrac{2\pi}{N}\dfrac{p_\text{м}r_\delta}{a_\text{с}}\dfrac{l_\delta}{m}\times \\ \times\vec{B}_{\delta\text{дtт}}n_\text{сдtт}\end{matrix} & 0 & -Jb^2 & 0 & -\dfrac{2\pi}{N}\dfrac{p_\text{м}r_\delta}{a_\text{с}c_\text{с}}\dfrac{l_\delta}{m}\vec{i}_\text{ст}n_\text{сдt}Д_t
\end{bmatrix},$$

обчислені за (i–1)-м наближенням невідомих;

$$\Delta\vec{X}_\text{п}^{\langle i\rangle} = \begin{bmatrix}\Delta\vec{i}_\text{с}^{\langle i\rangle} & \Delta\vec{i}_\text{р}^{\langle i\rangle} & \Delta\gamma^{\langle i\rangle} & \Delta B_\text{пt}^{\langle i\rangle} & \Delta\vec{B}_\text{сдt}^{\langle i\rangle}\end{bmatrix}_\text{т}$$

– вектор поправок первинних невідомих на *i*-й ітерації.

Утворимо вектор $\vec{X}_\text{в} = \begin{bmatrix}\vec{H}_\text{сдt} & \vec{B}_\text{рдt} & \vec{\vec{H}}_\text{рдt} & \vec{B}_{\delta\text{дt}} & \vec{F}_\text{дt} & \vec{\beta}_\text{мдt} & \vec{\psi}_\text{с} & \vec{\psi}_\text{р} & M & \omega\end{bmatrix}_\text{т}$, який назвемо вектором вторинних невідомих.

На *i*-й ітерації розв'язування нелінійної системи алгебричних рівнянь (12) необхідно виконати такі операції:

за (i–1)-м наближенням невідомих обчислити значення $A^{\langle i-1\rangle}$ матриці A і значення $\vec{f}^{\langle i-1\rangle}$ вектора $\vec{f}$ нев'язок;

розв'язати чисельним методом лінійну систему алгебричних рівнянь (12);

обчислити і-те наближення первинних невідомих за формулою

$$\vec{X}_\text{п}^{\langle i\rangle} = \vec{X}_\text{п}^{\langle i-1\rangle} + \Delta\vec{X}_\text{п}^{\langle i\rangle};$$

обчислити *i*-те наближення вторинних невідомих безпосередньо за тими рівняннями системи (9), (11), які розв'язані відносно цих невідомих.

Висновки

Опрацьована математична модель асинхронного двигуна зі скосом пазів ротора з урахуванням насичення основного магнітного кола та вищих просторових гармонік МРС дозволяє досліджувати поведінку двигуна в перехідних процесах, усталених режимах, здійснити оцінку впливу скосу пазів на статичні характеристики.

1. Гладкий В.М. Магнітно-механічна характеристика асинхронного двигуна з урахуванням скосу пазів // Вісник Нац. ун-ту «Львівська політехніка». – 2012. – № 736: Електроенергетичні та електромеханічні системи. – С. 16–20. 2. Капустин Г. В., Финкельштейн Б.В. Математическая модель и схема замещения насыщенной асинхронной машины со скосом пазов // Технічна електродинаміка. – 1998. – № 5. – С. 54–59. 3. Фильц Р.В. Дискретные аналоги дифференциальных операторов и их применение в задачах электромеханики // Изв. вузов. Электромеханика. – 1990. – № 3. – С. 5–11. 4. Фильц Р. В. Магнитно-механические параметры электромеханических преобразователей энергии // Изв. вузов. Электромеханика. – 1988. – № 12. – С. 18–22. 5. Фильц Р.В. Математические основы теории электромеханических преобразователей. – К.: Наук. думка, 1979. – 208 с. 6. Zhao HaiSen, Liu XiaoFang, Chen WeiHua, Peter Baldassari. Time-stepping finite element analysis on the influence of skewed rotors and different skew angels on the losses of squirrel-cage asynchronous motors. // Science China. Technological sciences. – 2011. – Vol. 54. – P. 2511–2519.

УДК 621.3.021

Л.Й. Глухівський
Державний інститут науково-технічної
та інноваційної експертизи, м. Київ

ДО ПИТАННЯ РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ У НЕЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ ДИФЕРЕНЦІЙНИМ ГАРМОНІЧНИМ МЕТОДОМ

Досліджується можливість застосування диференційного гармонічного методу для чисельного розрахунку перехідних процесів у нелінійних електричних колах з періодичними електрорушійними силами на прикладі нелінійного електричного R-L-C кола.

***Ключові слова:* нелінійні електричні кола, розрахунок перехідних процесів, диференційний гармонічний метод.**

Possibility of application of differential harmonic method for the numerical calculation of transients in nonlinear electric circuits with periodic electromotive forces is studied on the example of the nonlinear R-L-C circuit.

***Key words:* nonlinear electric circuits, transients, differential harmonic method.**

Вступ

У [1] викладено результати дослідження можливості застосування диференційного гармонічного методу (ДГМ) [2, 3] до розрахунку перехідних процесів у нелінійних електричних колах з періодичними електрорушійними силами. У цій роботі застосування ДГМ досліджувалося на двох простих об'єктах: нелінійному і лінійному R-L колах, тобто у випадку, коли розрахунок перехідного процесу зводиться до інтегрування диференціального рівняння першого порядку.

У роботі, яку висвітлено в цій статті, продовжується вивчення особливостей застосування ДГМ до розрахунку перехідних процесів у нелінійних електричних колах. Тут у якості об'єктів для досліджень використовуються також два електричних кола з періодичними електрорушійними