УДК 519.852:621.372

Л.К. Гліненко, В.М. Фаст
Національний університет "Львівська політехніка"

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ РАДІОЕЛЕКТРОННИХ СИСТЕМ У СЕРЕДОВИЩІ MS EXCEL SOLVER

L.K. Hlinenko., V.M. Fast,
Lviv Polytechnic National University

SOLVING OF RADIOELECTRONIC SYSTEMS COMBINATORIAL OPTIMIZATION PROBLEMS WITH MS EXCEL SOLVER

Possibilities of modelling optimization design problems as the extreme combinatorial graph problems and solving them in MS Excel Solver are studied. Drawbacks of existing models from considering their realization in MS Excel Solver are analyzed. As a result it is concluded that for forming a mathematical model of the optimization problem, suitable for realization in the environment of MS Excel Solver it is necessary to develop analytical presentation of an initial graph and minimum path between its arbitrary nodes, which, on the one hand, would adequately reflect the structure of initial graph and its minimum path, and, on the other hand, would satisfy the demands of problem presentation in the environment of MS Excel Solver of all versions, what requires to refuse the utilizing of function IF as well as other discontinuous functions. As a result, problem model based on graph incidence matrix is proposed. These model is in fact the graph enhanced incidence matrix, extension of which consists in including to the matrix a row corresponding to a base node. It is proved that in case of reflecting in this matrix a structure of any graph path the matrix content has to meet several conditions, namely: the sum of the modules of values for every matrix column, corresponding graph ribs included in a path, amounts 2; the sum of the modules of values for every matrix column, corresponding graph ribs out of a path, amounts 0; a sum of the modules of values in any matrix row equals to the degree of the node corresponding the row, and will take a value of 1 for initial and terminal vertexes, 2 – for the intermediate vertexes of the path and 0 for vertexes which don't belong to the path. These features enable to set the objective function and constraints as sums of products of certain matrix cell values and sums of values in the rows or columns. Conversion of the absolute values of matrix cell values to real values of incidence matrix cells by multiplying the table of changing cells by incidence matrix as well as conversion of real values of incidence matrix cell to absolute one by squaring them allows to apply the constraint of Boolean variable to changing cells without exploiting the discontinuous function ABS. The objective function and all constraints are presented by linear functions what makes the problem model extremely simple for solving by MS Excel Solver. The incidence matrix properties make it easy to set the technological constraint for number of wires (represented by graph ribs) to any lead (represented by graph vertex) by imposing the constraints on maximum value of corresponding node degree. Offered problem models based on graph incidence matrix enable to find extreme paths, either minimal or maximal, for directed and undirected graphs of any complexity.

Key words: modelling, graph, extreme path, optimization, incidence matrix, constraint.

Розглянуті можливості моделювання оптимізаційних задач проектування як екстремальних комбінаторних задач на графах та їх розв'язання у MS Excel Solver. Запропоновані моделі задач на основі аналітичного представлення графа його матрицею інциденцій, які забезпечують знаходження за допомогою MS Excel Solver екстремальних шляхів для орієнтованих та неорієнтованих графів довільної складності.

Ключові слова: моделювання, граф, екстремальний шлях, оптимізація, матриця інциденцій, обмеження.

Постановка проблеми

Математична постановка значної частини задач прийняття рішення у галузі конструкторського та технологічного проектування, управління та планування виробничих процесів, стратегічного та оперативного управління зводиться до комбінаторних задач дискретної оптимізації. Аналіз дослідження ефективності розв’язання таких задач свідчить про актуальність пошуку нових підходів до їх розв’язання та доступних засобів комп’ютерної підтримки.

Аналіз досліджень та публікацій

До задач комбінаторної оптимізації на графах зводяться задачі трасування друкованих плат, геометричного проектування, обрання оптимального складу пакета тиражованих програм та багато інших. За математичною постановкою ці задачі переважно є задачами пошуку мінімального шляху, мінімального покриття та задачею комівояжера. Дослідженню таких задач присвячені роботи провідних українських вчених І.В. Сергієнка, Н.З. Шора, Ю.Г. Стояна, О.О. Ємця, І.М. Ляшенка, С.В. Яковлева; алгоритми розв’язання цих задач та їх програмна реалізація детально описані у фаховій літературі [1, с. 28 – 73; 2, с. 107 – 116; 3, с. 231–304]. Розповсюдженість таких задач зумовила численні дослідження застосування для їх розв’язання пакета MS Excel, зокрема, надбудови Solver MS Excel 7.0 – 2010 [4, 5]. Моделювання задачі на знаходження мінімального шляху у MS Excel, як комбінаторної задачі з булевими змінними для реалізації обмеження зв’язності шляху на графі, передбачає залучення функції СУММАЕСЛИ() [4], що збільшує час пошуку рішення і зменшує допустиму складність графа, або засобів програмування VBE [5]. Розв’язанню методами еволюційного програмування MS Excel Solver 2010 задачі комівояжера присвячена робота Р. Расмусена [6]. Ідея способу може бути реалізована для пошуку екстремального шляху, проте, використання розривних функцій IF та OR, особливості генетичних алгоритмів призводять до неоднозначності отриманого рішення та залежності результату від часу розв’язання. Запропоновані моделі задачі вимагають використання обмеження неповторюваності («alldifferent»), що можливе винятково у версії MS Excel Solver 2010.

Ефективний спосіб моделювання задачі на знаходження мінімального шляху на графі як транзитної Т-задачі на основі представлення структури графа редукованою матрицею суміжності та її розв’язання як задачі лінійного програмування з обмеженням балансу потоків у вузлах графа запропонований у [7]. Проте застосування способу обмежується винятково пошуком мінімального шляху. У задачах на пошук максимального шляху, до яких зводиться, наприклад, задача на визначення тривалості проекту, для деяких структур графів можливе багаторазове включення у шлях тих самих ребер, внаслідок неможливості відбиття у матриці суміжності кратних ребер.

Мета роботи

Метою роботи є дослідження можливостей розв’язання задачі пошуку екстремальних шляхів на графі як задач лінійного дискретного програмування з булевими змінними за допомогою MS Excel Solver за спрощення та уніфікації обмежень на структуру шляху.

Виклад основних матеріалів дослідження

Задача на пошук мінімального шляху між вершинами a_1 і a_n зв’язаного графа $G(A,R)$ порядку (n, m), заданого множиною вершин $A = \{a_i\}$ потужністю n, множиною бінарних відношень між ними $R = \{<a_i,a_j>\}$ потужністю m, довжиною всіх ребер $\{<a_i,a_j>$, початковою вершиною a_1 та кінцевою a_n зводиться до визначення найкоротшого простого ланцюга (послідовності суміжних ребер графа) з початковою вершиною a_1 і кінцевою a_n.

Для реалізації математичної моделі задачі у середовищі Solver MS Excel необхідно розробити аналітичне представлення вихідного графа та мінімального шляху між його довільними вершинами, яке б, з одного боку, адекватно відтворювало структуру вихідного графа та його мінімального шляху, а, з іншого, відповідало б вимогам представлення моделі задачі у Solver MS Excel всіх версій, що передбачає відмову від використання функції IF та інших розривних функцій.

Враховуючи можливість наявності у графі кратних ребер, а також те, що граф-рішення буде підграфом вихідного графа, для аналітичного представлення графа обрано розширену матрицю інциденцій. *Розширена матриця інциденцій* – матриця, стовпці якої відповідають ребрам, рядки вершинам. Комірки, що відповідають вершині-початку ребра, містять -1, вершині-кінцю – +1, решта комірок є порожніми (нульовими). Для неорієнтованого графа обом вершинам відповідає 1.

Розширена матриця інциденцій вихідного графа $G(A,R)$ порядку (n, m) відтворюється у Excel у вигляді таблиці з кількістю рядків n та стовпців m. Ця таблиця матиме такі властивості:

- оскільки кожне ребро має один початок і один кінець, то сума по кожному стовпцю дорівнює [(-1) +(+1)] = 0. Якщо граф неорієнтований, то сума [(+1) +(+1)] =2;
- сума модулів значень матриці по кожному стовпцю дорівнюватиме [|-1| +|+1)] =2;
- кількість непорожніх комірок і сума модулів значень у рядку таблиці дорівнює степеню вершини, якій відповідає рядок.

Якщо у цій же таблиці за правилами заповнення матриці інциденцій відбити структуру довільного шляху G^* на графі $G(A,R)$, то, враховуючи, що граф G^* буде зв'язаним підграфом вихідного графа, який не містить циклів, то отримана таблиця матиме такі властивості:

- сума модулів значень матриці по кожному стовпцю, який відповідатиме ребрам, що увійдуть у шлях ($a_i,a_j \in G_1$), дорівнюватиме [|-1| +|+1)] =2; сума модулів значень матриці по кожному стовпцю, який відповідатиме ребрам, що не увійдуть у шлях ($a_i,a_j \notin G_1$), дорівнюватиме 0;
- кількість непорожніх комірок у рядку таблиці, як і сума модулів значень у рядку таблиці, дорівнюватиме степеню вершини, якій відповідає рядок, і прийматиме значення 1 для початкової і кінцевої вершин, 2 – для проміжних вершин шляху і 0 для вершин, що не увійшли у шлях.

Мінімальний шлях G_1 буде одним з шляхів $G_1 \in G^*$, для якого сумарна довжина ребер l_{ij} буде мінімальною. Тоді, якщо присутність ребра у шляху позначити $x_{ij} \in [0; 1]$, то цільова функція набуде вигляду $\sum x_{ij} l_{ij} \to min$, де i, j – номери вершин, і розв'язання задачі на пошук графа G_1 зведеться до знаходження такого варіанта цієї розширеної матриці інциденцій, за якого сумарна довжина ребер графа G_1 буде мінімальною. За запропонованого аналітичного представлення вихідного графа у вигляді розширеної матриці інциденцій у якості змінних моделі задачі виступатимуть значення комірок матриці, що відтворюватиме аналітичне представлення мінімального шляху. Враховуючи зручність використання обмеження булевості змінних замість обмеження «або -1, або +1», в якості аналітичного представлення доцільно використати матрицю інциденцій, яка не враховує орієнтацію ребер графа. Тоді, якщо прийняти за змінні значення цієї матриці і позначити x_{ik} значення на перетині i-го рядка, який відповідає i-й вершині, і k-го стовпця, який відповідає k-му рядку, то математична модель цільової функції задачі набуде вигляду

$$F(X) = \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{1}{2} l_k \cdot \sum_{i=1}^{n} x_{ik} \right] \to min, \tag{1}$$

а обмеження задачі зведуться до обмежень на структуру шляху як простого ланцюга, та обмежень приналежності всіх ребер шляху вихідному графові з урахуванням їх напрямку. Перша група обмежень випливає з описаних вище властивостей матриці інциденцій шляху і має вигляд

$$\sum_{k=1}^{m} x_1 = 1; \ \sum_{k=1}^{m} x_n = 1; \ \sum_{k=1}^{m} x_i = 1; \quad i \neq 1, \quad i \neq n. \tag{2}$$

За позначення значення комірок матриці інциденцій вихідного графа x_{ik}^0 друга група обмежень набуде вигляду

$$x_{ik} \leq | x_{ik}^0 | \quad \text{або} \quad x_{ik} \leq (x_{ik}^0)^2 ; \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{m} x_{1k} \cdot x_{1k}^0 = -1; \quad \sum_{k=1}^{m} x_{nk} \cdot x_{nk}^0 = 1; \quad \sum_{k=1}^{m} x_{ik} \cdot x_{ik}^0 = 0, \quad i \neq 1, \quad i \neq n. \tag{4}$$

Реалізацію зазначеного підходу для пошуку найкоротшого шляху між парою вершин графа – вершиною 1 та 8 – розглянемо для графа на рис. 1, *а*.

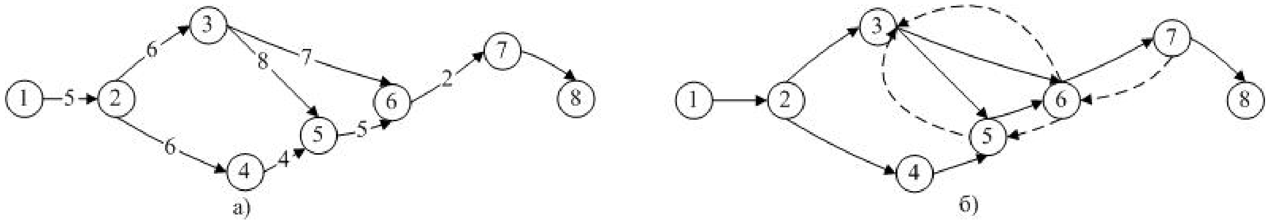
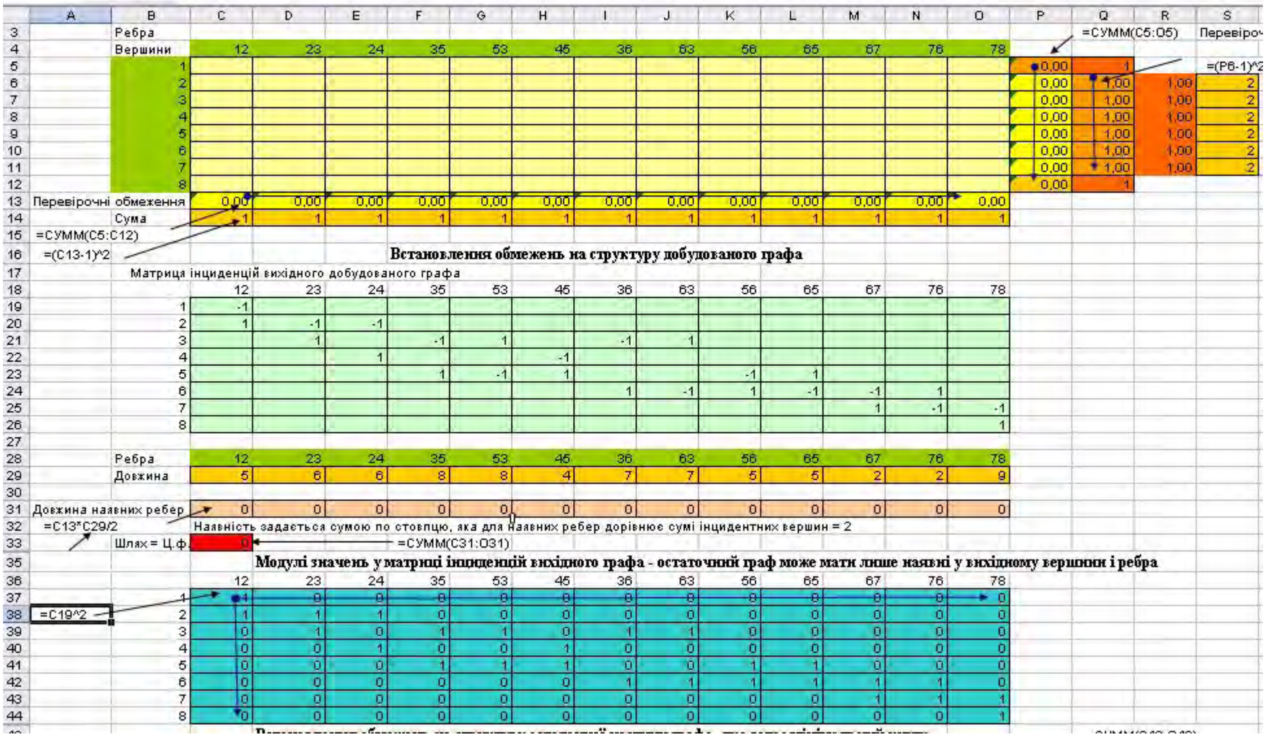


Рис. 2. Структура вихідного (а) та добудованого (б) графа з кратними протилежно спрямованими дугами

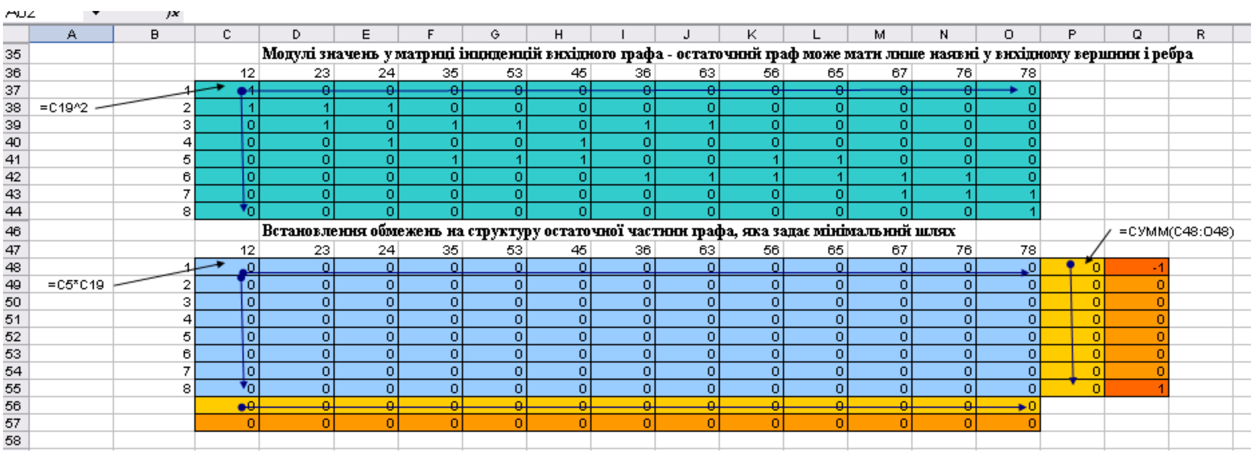
Цей граф є орієнтованим, тому його представлення матрицею інциденцій є однозначним. У разі неорієнтованого графа для врахування можливості переміщення по ребру у довільному напрямку у граф необхідно ввести фіктивні кратні ребра з протилежним напрямком до реальних і тієї самої довжини (рис. 1б).

Матриця невідомих матиме розмірність матриці інциденцій добудованого вихідного графа (рис. 2); реалізація моделі задачі в MS Excel показана на рис. 3, 4 і у табл. 1.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
3		Ребра															=СУММ(C5:O5)		Перевіроч
4		Вершини	12	23	24	35	53	45	36	63	56	65	67	76	78				
5		1														0,00	1		=(P6-1)^2
6		2														0,00	1,00	1,00	2
7		3														0,00	1,00	1,00	2
8		4														0,00	1,00	1,00	2
9		5														0,00	1,00	1,00	2
10		6														0,00	1,00	1,00	2
11		7														0,00	1,00	1,00	2
12		8														0,00	1		
13	Перевірочні обмеження		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00				
14		Сума	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1				
15	=СУММ(C5:C12)																		
16	=(C13-1)^2					**Встановлення обмежень на структуру добудованого графа**													
17		Матриця інциденцій вихідного добудованого графа																	
18			12	23	24	35	53	45	36	63	56	65	67	76	78				
19		1	-1																
20		2	1	-1	-1														
21		3		1		-1	1		-1	1									
22		4			1			-1											
23		5				1	-1	1			-1	1							
24		6							1	-1	1	-1	-1	1					
25		7											1	-1	-1				
26		8													1				
27																			
28		Ребра	12	23	24	35	53	45	36	63	56	65	67	76	78				
29		Довжина	5	6	6	8	8	4	7	7	5	5	2	2	9				
30																			
31	Довжина наявних ребер		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
32	=C13*C29/2		Наявність задається сумою по стовпцю, яка для наявних ребер дорівнює сумі інцидентних вершин = 2																
33		Шлях = Ц.ф.	0			=СУММ(C31:O31)													
35				**Модулі значень у матриці інциденцій вихідного графа - остаточний граф може мати лише наявні у вихідному вершини і ребра**															
36			12	23	24	35	53	45	36	63	56	65	67	76	78				
37		1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
38	=C19^2	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
39		3	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0				
40		4	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0				
41		5	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0				
42		6	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0				
43		7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1				
44		8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1				

Рис. 3. Модель задачі на пошук мінімального шляху на графі (рис. 2)



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
35				**Модулі значень у матриці інциденцій вихідного графа - остаточний граф може мати лише наявні у вихідному вершини і ребра**														
36			12	23	24	35	53	45	36	63	56	65	67	76	78			
37		1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
38	=C19^2	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
39		3	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0			
40		4	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0			
41		5	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0			
42		6	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0			
43		7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1			
44		8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1			
46				**Встановлення обмежень на структуру остаточної частини графа, яка задає мінімальний шлях**													=СУММ(C48:O48)	
47			12	23	24	35	53	45	36	63	56	65	67	76	78			
48		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	
49	=C5*C19	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
50		3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
51		4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
52		5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
53		6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
54		7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
55		8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
56			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
57			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
58																		

Рис. 4. Встановлення обмежень на структуру графа мінімального шляху

Таблиця 1

Реалізація елементів моделі задачі на пошук мінімального шляху на графі (рис. 2) у MS Excel

Адреса комірки	Формула	Розповсюджена на комірки	Зміст, виконуване завдання
C5:O12			Матриця невідомих, яка є матрицею інциденцій графа мінімального шляху без урахування орієнтації ребер
P5	=СУММ(C5:O5)	P5:P12	Степінь вершин графа мінімального шляху; може приймати значення 1 (для вихідної та кінцевої вершин шляху), 0 (для вершин графа, що не увійшли у шлях), 2 (для вершин графа, що є проміжними вершинами шляху)
Q6	=(P6-1)^2	Q6:Q11	Результат перетворення степеня проміжних вершин графа для отримання чисельного значення 1 для всіх вершин вихідного графа
C13	=СУММ(C5:C12)	C13:O13	Сума модулів значень у стовпці матриці інциденцій графа мінімального шляху; має приймати значення 0 для ребер, що не входять у шлях, і 2 – для ребер, що входять
C14	=(C13-1)^2	C14:O14	Результат перетворення суми модулів значень у стовпці матриці інциденцій графа мінімального шляху для отримання чисельного значення 1 для всіх ребер вихідного графа
Q5	1	Q12; R6:R11	Праві частини обмежень модель
C19:O26			Матриця інциденцій добудованого вихідного графа (рис. 2)
C29:O29			Довжини ребер добудованого вихідного графа (рис. 2)
C31	=C13*C29/2	C31:O31	Довжини ребер, які входять у граф мінімального шляху (для ребер, що не входять у шлях, сума модулів значень у стовпці матриці інциденцій графа мінімального шляху дорівнює 0)
C33	=СУММ(C49:O49)		Цільова функція – мінімальний шлях між вершинами 1 та 8
C37	=C19^2	C37:O44	Матриця інциденцій добудованого вихідного графа (рис. 2) без урахування орієнтації ребер
C48	=C5*C19	C48:O55	Матриця інциденцій графа мінімального шляху з урахуванням орієнтації ребер
P48	=СУММ(C48:O48)	P48:P55	Сума значень рядка матриці інциденцій графа мінімального шляху з урахуванням орієнтації ребер; має приймати значення -1 для вихідної вершини графа, +1 – для кінцевої і 0 – для проміжних
C56	=СУММ(C48:C55)	C56:O56	Сума значень стовпця матриці інциденцій графа мінімального шляху з урахуванням орієнтації ребер; має приймати значення 0 для всіх ребер
Q48	-1		Праві частини обмежень модель
Q55	1		
Q49:Q54	0		
C57	0	C57:O57	

Постановка такої задачі, як оптимізаційної, передбачає ідентифікацію у діалоговому вікні Пошуку рішення надбудови Solver (Пошук рішення) MS Excel: типу екстремуму (мінімум); адрес комірок, які містять цільову функцію (C33) та змінні (C5:O12); обмежень (рис. 4) та параметрів пошуку (лінійна модель). Зміст обмежень у полі «Обмеження» (рис. 4) розкривається у табл. 2.

Виконання процедури «Пошук рішення» повертає перший знайдений варіант мінімального шляху. Змінюючи початкові значення, можна отримати інші варіанти шляхів тієї самої довжини.

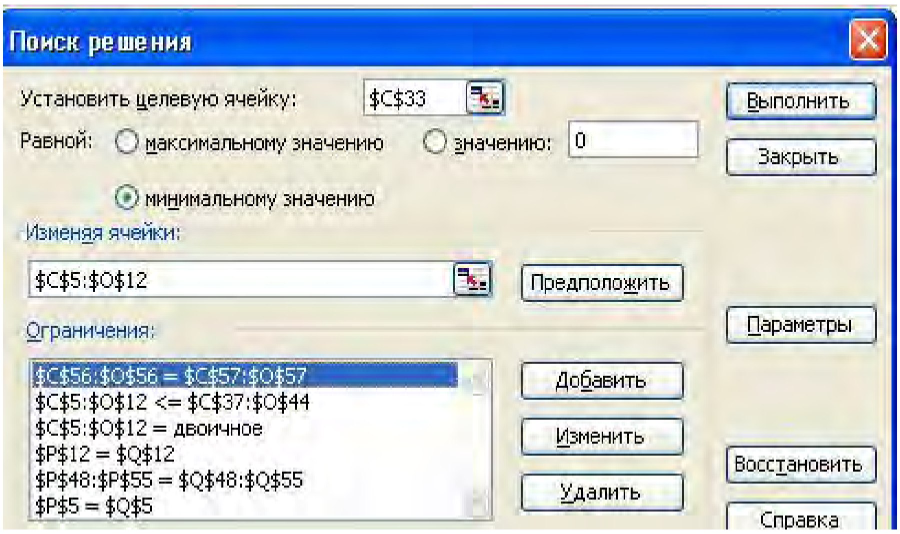


Рис. 5. Перенесення моделі задачі у вікно Пошук рішення

Таблиця 2

Реалізація обмежень моделі задачі на пошук мінімального шляху (рис. 2) у MS Excel Solver

№	Модель обмеження	Зміст обмеження
1	\$C\$5:\$O\$12 = двоичное	Обмеження булевості змінних – модулів (квадратів) значень комірок матриці інциденцій графа
2	\$C\$5:\$O\$12 <= \$C\$37:\$O\$44	Обмеження на приналежність ребер шляху графові
3	\$P\$5= \$Q5	Обмеження на структуру шляху: степінь початкової і кінцевої вершини шляху дорівнює 1; проміжних – 2; вершин графа, що не увійшли у шлях - 0
4	\$P\$12= \$Q12	
5	\$P\$6:\$P11<= 2 або \$Q\$6:\$Q11=1	
6	\$P\$48:\$P\$55 = \$Q\$48:\$Q\$55	Обмеження на структуру шляху: сума значень у рядку матриці інциденцій графа мінімального шляху має дорівнювати -1 для вихідної вершини графа, +1 – для кінцевої і 0 – для проміжних

Розв’язання задачі на знаходження максимального шляху не вимагає ніяких змін у моделі задачі та її реалізації у MS Excel Solver, окрім зміни типу екстремуму, оскільки циклічне проходження частин графа виключається властивостями матриці інциденцій.

Висновки

Запропонований підхід дає змогу автоматизувати розв’язання багатьох оптимізаційних задач, які можуть бути зведені до задач на пошук екстремального (мінімального чи максимального) шляху без використання спеціалізованого програмного забезпечення та навичок програмування, що робить цей підхід привабливим для інженерної практики.

1. Черноморов Г.А. Теория принятия решений / Г.А.Черноморов. – Новочеркасск: «Известия вузов: Электромеханика». – 2002. – 276 с. 2. Werneck R.F. Shortest Paths and Experimental Evaluation of Algorithms. – Microsoft Research / Renato F. Werneck – SiliconValley:MIDAS. – 2010. – 123 с.3. Седжвик Р. Фундаментальные алгоритмы на С++. Алгоритмы на графах / Р.Седжвик. – СПб. :ООО»ДиаСофтЮП, 2002. – 496 с. 4. Кузьмичов А. І., Математичне програмування в Excel. / А.І. Кузьмичов, М. Г. Медведєв. – К. Вид-во Європ. ун-ту, 2005 – 320 с. 5. Леоненков А.В. Решение задач оптимизации в среде MS Excel / А. Леоненков – СПб.: БХВ - Санкт-Петербург, 2005. – 704 с. 6. Rasmussen R. TSP in Spreadsheets – a Guided Tour / Rasmus Rasmussen // International Review of Economic Education. – 2011. – Vol. 10. – Iss. 1. – С. 94 – 11. 7. Гліненко Л.К. Розв’язання транспортної задачі з проміжними пунктами за допомогою надбудови Solver MS Excel / Гліненко Л.К., Яковенко Є.І. // Науковий вісник НЛТУ України. – 2012. – Вип. 22.9. – С. 306 – 319.