(16), (17) $u \in H_l\left(R_{n+1}^{++}\right)$. Якщо $|q| \geq q_0$, має місце оцінка

$$\|U\|_{l,R_{n+1}^{++}} \leq C\left\{\|f\|_{l,R_{n+1}^{++}} + \sum_{\nu=1}^{p} \|g_\nu\|'_{l-m_\nu-\frac{1}{2},R_n^+}\right\},$$

де стала С не залежить від q.

1. Агронович И.С., Вишик М.И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. Успехи мат.наук. 1964. 19. Вып. 3. С. 53–162. 2. Крехивский В.В. Эллиптические задачи с оператором Бесселя // Линейные краевые задачи математической физики: Темат. сборник. К., 1973. С. 307–322. 3. Киприянов И.А. Преобразование Фурье–Бесселя и теоремы вложения для весовых классов // Труды Моск. мат. о-ва. 1967. 89. С.130-213.

УДК 517.95

Лавренюк С.П., Процах Н.П.
Львівський національний університет ім.І.Франка

ВНУТРІШНЯ ГЛАДКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОЇ СИСТЕМИ З ВИРОДЖЕННЯМ

Some sufficient conditions, for which the derivatives on *t* of the solution till s-th power, $s \in N$ and the derivatives on x_i, $i = 1, \ldots, n$ till r-th power, $r \in N$ exists are obtained for mixed problem for one evolutional degenerative system inside the noncylindrical domain *Q*.

Для однієї еволюційної системи з виродженням в нециліндричній області отримано умови, при яких існують похідні узагальненого розв'язку за змінною t до порядку s, $s \in N$, та за змінними x_i, $i = 1, \ldots, n$ до порядку r $r \in$ N.

Нехай Q – обмежена область в R^{n+1}, $\Omega_\tau = Q \bigcap \{t = \tau\}$ така, що mes $\Omega_\tau > 0$; $\tau \in [0, T]$; $\Omega_{\tau_1} \subset \Omega_{\tau_2}$ якщо $\tau_1 \leq \tau_2$. Позначимо $S = \bigcup\limits_{\tau \in (0,T)} \partial\Omega_\tau$, ϑ_t – кут між поверхнею S і віссю t. Припустимо, що $S \in C^1$, ϑ_t ? 0.

Розглянемо в області Q систему рівнянь

$$(\Phi(x,t)u_t)_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(A_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u\right) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(B_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u_t\right) +$$
$$+ \sum_{1\leq|\alpha|\leq m} G_\alpha(x,t) D^\alpha u + \sum_{1\leq|\alpha|\leq m} C_\alpha(x,t) D^\alpha u_t = \sum_{|\alpha|\leq p} (-1)^{|\alpha|} F_\alpha(x,t), \qquad (1)$$

з крайовими умовами

$$D^{\alpha}u\,|_S=0,|\alpha|\le m-1,\;\; D^{\alpha}u_t\,|_S=0,|\alpha|=m-1, \tag{2}$$

де $m\ge 1$; $0\le p\le m$; $\Phi(x,t),$, $A_{\alpha\beta}(x,t)$, $B_{\alpha\beta}(x,t)$, $|\alpha|=|\beta|\le m$, $G_{\alpha}(x,t)$, $C_{\alpha}(x,t)$, $1\le|\alpha|\le m$ – квадратні матриці порядку N ; $u=$ colon$(u_1,\dots,u_N)$; $F_{\alpha}=$colon$(F_{\alpha 1},\dots,F_{\alpha N})$ $|\alpha|\le p$; $x=(x_1,\dots,x_n)$;

$$D^{\alpha}=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}},\quad |\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n.$$

$$D_0^i=\frac{\partial^i}{\partial t^i}.$$

Припустимо, що для коефіцієнтів системи (1) виконуються такі умови.

Умова (Φ_0). $\Phi\in L^{\infty}(Q)$; $(\Phi(x,t)\xi,\xi)\ge\varphi(t)|\xi|^2$ для майже всіх $(x,t)\in Q$, $\forall\xi\in R^N$ де $\varphi\in C([0,T])$; $\varphi(0)=0$; $\varphi(t)>0$, $t\in(0,T]$; $\varphi'\in C((0,T])$; $\varphi'(t)\ge 0$, $t\in(0,T]$, $\Phi(x,t)=\Phi^*(x,t)$, для майже всіх $(x,t)\in Q$.

Умова (Φ_1). $\Phi_t\in L^{\infty}(Q_{\varepsilon,T})$ $\forall\varepsilon>0$; $(\Phi_t(x,t)\xi,\xi)\ge\varphi_1(t)|\xi|^2$ для майже всіх $(x,t)\in Q$, $\forall\xi\in R^N$ де $\varphi_1\in C((0,T])$; $\varphi_1(t)>0$, $t\in(0,T]$.

Умова (A_0). $A_{\alpha\beta},\ A_{\alpha\beta t}\in L^{\infty}(Q)$;

$$\int\limits_{\Omega_t}\sum_{|\alpha|=|\beta|\le m}\left(A_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}v,D^{\alpha}v\right)dx\ge a_0\int\limits_{\Omega_t}\sum_{|\alpha|=m}|D^{\alpha}v|^2dx,\quad a_0>0$$

для майже всіх $t\in(0,T)$, $\forall v\in\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega_t)$; $A_{\alpha\beta}(x,t)=A_{\beta\alpha}(x,t)$, $A_{\alpha\beta}(x,t)=A^*_{\beta\alpha}(x,t)$, для майже всіх $(x,t)\in Q$, $|\alpha|=|\beta|\le m$.

Умова (B_0). $B_{\alpha\beta}\in L^{\infty}(Q)$;

$$\int\limits_{\Omega_t}\sum_{|\alpha|=|\beta|\le m}\left(B_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}v,D^{\alpha}v\right)dx\ge b_0\psi(t)\int\limits_{\Omega_t}\sum_{|\alpha|=m}|D^{\alpha}v|^2dx,\quad b_0>0$$

для майже всіх $t\in(0,T)$, $\forall v\in\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega_t)$; $\psi\in C([0,T])$; $\psi(0)\ge 0$; $\psi(t)>0$, $\forall t\in(0,T]$.

Тут $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega_t)$ – замикання простору функцій $C_0^{\infty}(\Omega)$ за нормою простору $H^k(\Omega)$.

Введемо простір функцій $H^{l,1}_{0,\varphi,\psi}(Q)$ як замикання множини нескінченно диференційовних функцій в $\overline{Q}$, які дорівнюють нулеві в околі S за нормою

$$\|u\|^2=\int\limits_{Q}\left(\varphi(t)|u_t|^2+\sum_{|\alpha|=m}|D^{\alpha}u|^2+\psi(t)\sum_{|\alpha|=m}|D^{\alpha}u_t|^2\right)dxdt.$$

Розглянемо початкові умови

$$\lim_{t\to+0}u(x,t)=0,\qquad \lim_{t\to+0}\sqrt{\varphi(t)}u_t(x,t)=0. \tag{3}$$

Означення.

Функція $u(x,t)$, котра задовольняє включення $u\in H^{l,1}_{0,\varphi,\psi}(Q)\bigcap C([0,T];L^2(\Omega_t))$;

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[-(\Phi(x,t)u_t, v_t) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m}\big(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u, D^\beta v\big) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le m}\big(B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t, D^\alpha v\big) +$$
$$+\sum_{1\le|\alpha|\le m}\big(G_\alpha(x,t)D^\alpha u, v\big) + \sum_{1\le|\alpha|\le m}\big(C_\alpha(x,t)D^\alpha u_t, v\big) - \sum_{|\alpha|\le p}(F_\alpha(x,t), D^\alpha v)\Big]dxdt +$$
$$+\int\limits_{\Omega_{t_2}}(\Phi(x,t)u_t, v)\,dx - \int\limits_{\Omega_{t_1}}(\Phi(x,t)u_t, v)\,dx = 0$$

для довільної функції $v \in C_0^\infty(Q)$ і всіх $t_1, t_2, 0 < t_1 < t_2 \le T,$ та початкові умови (3), називається узагальненим розв'язком задачі (1)–(3).

Тут $Q_{t_1,t_2} = Q \bigcap \{t_1 < t < t_2\}$.

Існування та єдиність узагальненого розв'язку цієї задачі доведено в працях [1-3].

Позначимо

$$M^s = \int\limits_Q \sum_{|\alpha|\le p}\left(\sum_{j=0}^{s-2}\sum_{i=0}^{2}|D_0^i F_\alpha(x,t)|^2 + \sum_{i=1}^{s-1}|D^i F_\alpha(x,t)|^2 + \sum_{i=1}^{s}|D^i F_{\alpha t}(x,t)|^2\right)dxdt;$$

$$M_s = \int\limits_Q \sum_{|\alpha|\le p}\sum_{i=1}^{s}|D_0^{i-1}F_{\alpha t}|^2 dxdt.$$

Теорема.

Нехай коефіцієнти системи (1) задовольняють умови
$(\Phi_0),\ (\Phi_1),\ (A_0),\ (B_0), \delta > 0 -$ мале число.

1) Якщо $D_0^i G_\alpha (1 \le |\alpha| \le m),\ D_0^i C_\alpha (1 \le |\alpha| \le m),\quad D_0^i B_\alpha (|\alpha| = |\beta| \le m),\ i = \overline{0, s-1},$ $D_0^i \Phi, i = \overline{1, s}$ належать $L^\infty(Q_{\delta,T});\ M_s < +\infty.$ Тоді існують в $Q_{\delta,T}$ узагальнені похідні $D^\alpha D_0^i u,\ |\alpha| \le m,\ i = \overline{0, s}, s \in N.$

2) Якщо $D^j D_0^i G_\alpha (1 \le |\alpha| \le m),\ D^j D_0^i C_\alpha (1 \le |\alpha| \le m),\quad D^j D_0^i B_{\alpha\beta} (|\alpha| = |\beta| \le m),$ $j + i \le r,\ \ i \le 2,\quad j = \overline{0, r};\ D^j D_0^i \Phi \in L^\infty(\tau), i + j \le r,\ j = \overline{0, r}, i \le 3, r \in N.$

Тоді існують в $Q_{\delta,T}$ узагальнені похідні $D^\alpha u_t, |\alpha| \le m + r.$

При доведенні теореми використано метод кінцево-різницевих відношень.

1. Лавренюк С.П. Про єдиність розв'язку деяких еволюційних систем з виродженням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. 1998. Вип. 51. С. 20–25. 2. Lavrenyuk S.P. On the uniqueness of a solution of mixed problem for one degenerated evolutional system // Математичні студії, 1998. Т.9. N. 1. С.21–28. 3. Процах Н. Існування розв'язку однієї еволюційної системи з виродженням // Віс.Львів. ун-ту. Сер. Мех-мат, 1999. Вип.54. С. 159–170.