УДК 330.42

Н.Л. Іващук
Національний університет "Львівська політехніка"

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ РОЗПОДІЛІВ ПРИБУТКУ МЕТОДОМ ВИРОБНИЧИХ ФУНКЦІЙ

Розроблено методику дослідження динаміки фінансових та виробничих показників підприємств, таких як сумарний прибуток, попит на виробничий фактор та пропозиція кінцевого продукту. Показники описано у вигляді динамічних статистичних розподілів за виробничим фактором у вартісному виразі та в одиницях продукту. Результати розробки апробовано на статистичних даних діяльності ряду виробництв нафтопереробної галузі.

In article the technique of research for dynamics of financial and industrial parameters of the enterprises, such as total profit, demand for a production factor and supply of a final product is developed. The parameters are described as dynamic statistical distributions on a production factor in cost expression and in terms of a product. The results of development are illustrated on statistics of manufactures of oil refining branch.

Постановка проблеми та її зв’язок з важливими науковими чи практичними завданнями. Ідея генерування виробничих функцій економіки через розподіли вхідних коефіцієнтів належить Х. Хаутеккеру. Він показав, що модифікований Парето-розподіл вхідних коефіцієнтів приводить до виробничих функцій типу Коба-Дугласа [1]. Л. Йохансен, продовжуючи дослідження Х. Хаутеккера, встановив зв’язок похідних виробничих функцій із характеристиками розподілу потужностей. Іншими словами, встановив їх статистичну природу. Опрацьовуючи велику кількість економічних задач, він обгрунтував природу такого зв’язку. Результати досліджень Л. Йохансена у цьому напрямку викладено у відомій його роботі [2].

Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв’язання даної проблеми. Базуючись на впровадженому Йохансеном понятті потужності [3] та дискретній динамічній моделі виробництва з однорідним продуктом, описаній в роботі [4], досліджується динаміка основних економічних показників виробництва у межах технологічного підходу.

Цілі статті. У даній роботі, використовуючи вигляд функції прибутку виробництва як розподілу потужності за технологіями, обчислюється виробнича функція у межах динамічної моделі виробництва із врахуванням зносу потужності і неповним забезпеченням технологічних ресурсів. Виробнича функція обчислена через основні параметри самого виробництва – темпу виробничих витрат і основних ринкових показників – цін.

Виклад основного матеріалу дослідження з повним обгрунтуванням отриманих наукових результатів. Згідно з теорією Хаутеккера-Йохансена, єдиними змінними факторами виробництва вважаються технології. Щодо позначень, то далі x– технологія, або змінний виробничий фактор. Це може бути будь-який виробничий фактор, від зміни якого виникає необхідність дослідити виробничі показники. Наприклад, праця, сировина, енергозабезпечення і т. д. Суттєвою особливістю розглядуваної моделі є також те, що в ній враховуються ще два фактори, які не залежать від технології x: темп зростання потужності μ, що знаходиться у межах $0 \le \mu \le 1$, а також темп росту виробництва $\gamma > 0$. Наприклад, якщо за виробничий фактор брати працю, то темпи зносу потужності μ і зносу основних фондів, який розраховується у виробничих балансах підприємств, можна вважати, дорівнюють один одному. Зазначимо, що згадані коефіцієнти є безрозмірними величинами.

Зупинимося на економетричній стороні моделі. Почнемо із вимірювання продукту виробництва. Нехай далі $[\pi]$ – одиниця виміру продукту виробництва; Y – кількість продукту, або $\mathrm{Y}[\pi]$ – кількість продукту із вказанням одиниць виміру. Зокрема, $[\pi]=$ *тонна* , $[\pi]=$ *кіловат-година,* $[\pi]=$ *кубометр.* Кількість продукту вимірюється в цілих одиницях $\mathrm{Y}=0,1,2,3,\ldots,\mathrm{n}.$.

Як звичайно, статистичні дані по виробництву фіксуються через рівні проміжки часу. Тому в моделі час, який всюди далі позначено через t, пробігає дискретний ряд $\mathrm{t}=0,1,2,3,\ldots,\mathrm{k}.$ Якщо $[\tau]$ – одиниця виміру часу, то залежно від конкретної економічної задачі, $[\tau]$ = *година,* $[\tau]$ = *місяць,* $[\tau]$ = *рік* і т. д.

Перейдемо до вимірювання технології. Далі $[\mathrm{h}]$ – одиниця виміру технології. Технологія x вимірюється одиницями $\mathrm{x}=0,1,2,3,\ldots,\mathrm{k}.$ Уточнимо одиниці вимірювання технології або, як ще можна сказати, технологічних витрат. За одиницю $[\mathrm{h}]$ можна приймати, наприклад, обернену величину до одиниці рентабельності виробництва відносно змінного виробничого фактора. Тоді x називається нормою витрат виробничого фактора (технології) на одиницю продукту. Якщо виробничим фактором є праця, то така одиниця вимірює трудомісткість одиниці продукту. Якщо виробничим фактором x буде енергозабезпечення, то вимірюється енергомісткість продукту, якщо ж x – основні фонди, то вимірюється фондомісткість продукту.

Перейдемо тепер до опису самої моделі. Розглядаємо виробничу галузь або підприємство з однорідним продуктом Y. Такими моделями можна описувати, наприклад, енергетичну, сталеплавильну, алюмінієву, а також більшість видобувних галузей та їх окремі підприємства. Нагадаємо поняття потужності виробництва за Л. Йохансеном. А саме, потужність – це максимальний обсяг продукції, виробленої за одиницю часу на існуючому обладнанні, *за умови, що враховано обмеження на наявність змінних факторів виробництва*. Це означає, що потужність, значення якої вимірюються в одиницях продукції $[\pi]$, є функцією часу і технології. Надалі потужність виробництва із технологією x позначаємо $\mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{x})$.

Наявність зносу потужності приводить до зменшення обсягів виробництва. Тому для забезпечення зростання або принаймні неспадання виробництва необхідні відповідні витрати, які б компенсували знос потужності. Виробничі витрати потребують відповідних витрат технології x і мають протяжність у часі, тому записуємо цей процес у вигляді функції $\mathrm{L}(\mathrm{t},\mathrm{x})$. Функція виробничих витрат $\mathrm{L}(\mathrm{t},\mathrm{x})$ задана в одиницях вигляду $[\pi\times\mathrm{h}]$.

Модель зростання потужності виробництва, у якій враховано темп її зносу μ і наявність виробничих витрат $\mathrm{L}(\mathrm{t},\mathrm{v})$, відповідних технологічним витратам v, дозволяє для всіх подальших значень технологій $\mathrm{x}=(\mathrm{n}+1),(\mathrm{n}+2),(\mathrm{n}+3),\ldots,(\mathrm{n}+\mathrm{N})$ потужність визначати як розв'язок рівняння

$$\Delta\mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{x})+\mu\cdot\left[\mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{x})+\mathrm{x}\cdot\Delta_{\mathrm{h}}\mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{x})\right]=\mu\cdot\mathrm{L}(\mathrm{t},\mathrm{v}) \tag{1}$$

за граничною умовою

$$\mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{v})-\mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{v}-1)=\frac{\mathrm{L}(\mathrm{t},\mathrm{v})}{\mathrm{v}}, \tag{2}$$

де позначено через

$$\Delta\mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{x}):=\mathrm{M}(\mathrm{t}+1,\mathrm{x})-\mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{x}),$$
$$\Delta_{\mathrm{h}}\mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{x}):=\mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{x}+1)-\mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{x})$$

різницеві оператори, відповідно, за часовою змінною t і технологією x. Величина $\mathrm{x}\times\Delta_{\mathrm{h}}\mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{x})$ пропорційна приросту потужності $\Delta_{\mathrm{h}}\mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{x})$ із коефіцієнтом пропорційності, що дорівнює величині x – витрат технології. Тому добуток $\mu\times\left[\mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{x})+\mathrm{x}\times\Delta_{\mathrm{h}}\mathrm{M}(\mathrm{t},\mathrm{x})\right]$ оцінює величину, на яку зменшиться потужність $M(t,x)$ в результаті зносу. Потужність $M(t,x+1)$ при технологічних витратах $x+1$ дорівнює потужності $M(t,x)$ при технологічних витратах x, зменшеній на величину зносу і збільшеній на величину $\mu L(t,\nu)$ – інвестицій, спрямованих на компенсацію її втрат в результаті зносу. Величина такої компенсації при технологічних витратах ν пов'язана із виробничими витратами граничними умовами $\nu \times \left[M(t,\nu) - M(t,\nu-1)\right] = L(t,\nu)$. Тобто, приріст потужності в результаті виробничих витрат $L(t,\nu)$, розрахованих на використання технології ν, пропорційний величині цих витрат із коефіцієнтом пропорційності, що дорівнює величині самої технології ν. Отже, виробничі витрати передбачають введення нових потужностей, розрахованих на використання технології ν, для компенсації втрат, пов'язаних зі зносом. Саме такий економічний зміст рівняння (1) і умови (2).

Зауважимо, що рівняння (1) можна розглядати як узагальнення класичного рівняння для потужності виробництва, наведеного, наприклад, в [5].

Використовуючи модель виробництва, яка описується рівнянням (1) із граничною умовою (2), опишемо метод дослідження зміни його потужності. Почнемо з методики визначення розподілу потужності $M(t,x)$ виробництва за шкалою зміни його технології у момент часу t, тобто визначення функції

$$m(t,x+1) := \ _h M(t,x) = M(t,x+1) - M(t,x) \tag{3}$$

за попередньою граничною умовою (2), яка переписується у формі

$$m(t,\ ) := \ _h M(t,\ -1) = L(t,\ )/\ . \tag{4}$$

Відразу зауважимо, що величина розподілу потужності вимірюється у нових одиницях. А саме, далі [π/h] – одиниця виміру розподілу потужності за технологіями. Зокрема, [π/h] = *тонна/трудомісткість*, [π/h] = *кубометр/енергомісткість*, [π/h] = *кіловат-година/фондомісткість* і т.д.

Застосовуючи до рівняння (1) різницевий оператор Δ_h, одержуємо

$$_h\ M(t,x) + \ \cdot\ _h M(t,x) + \ \cdot\ _h\left[x \cdot\ _h M(t,x)\right] = 0.$$

У результаті елементарних перетворень останньої рівності отримуємо основне рівняння для визначення розподілу потужності $m(t,x)$

$$m(t,x) + 2\ \cdot m(t,x) + \ \cdot (x-1) \cdot\ _h m(t,x) = 0. \tag{5}$$

Розв'язок рівняння (5) шукається у вигляді добутку функцій $m(t,x) = \gamma^t \times u(x)$, де γ – темп зростання потужності за рахунок виробничих витрат. Параметр γ, власне, і є параметром планування зростання чи спадання потужності виробництва. Зрозуміло, що він є безрозмірним. Підставляючи функцію $m(t,x) = \gamma^t \times u(x)$ до рівняння (5) і користуючись відомою формулою

$$_t\ ^t = \ ^t \cdot (\ -1),$$

одержуємо рівняння для знаходження допоміжної функції $u(x)$

$$\cdot (x-1) \cdot\ u(x) + (2\ +\ -1) \cdot u(x) = 0,$$

для значень технологій $x = (\nu+1), (\nu+2), \ldots$ за умови, що при $x = \nu$ величина $u(\nu)$ задана. Розв'язок останнього рівняння відомий і його можна записати у вигляді

$$u(x) = u(\ )\prod_{l=\nu}^{x-1}\left[1 - \frac{2\ +\ -1}{\ \cdot (l-1)}\right],$$

де $x \geq \nu+1$, або $x-1 \geq \nu$. Тому розподіл потужності $m(t,x)$ за технологіями набуде вигляду

$$m(t,x)= \ ^{t}\cdot u(\ )\prod_{l=v}^{x-1}\left[1-\frac{2\ +\ -1}{\ \cdot(l-1)}\right].$$

Величину $u(\nu)$ знайдемо із граничної умови

$$^{t}\cdot u(\ )=m(t,\ )=L(t,\ )/\nu .$$

Звідси, зокрема, випливає така властивість функції виробничих витрат

$$L(t,\ )= \ ^{t}\cdot L(0,\ ), \qquad (6)$$

де $L(0,\nu)$ – значення функції виробничих витрат у початковий момент часу. Звідси випливає, що функція виробничих витрат $L(t,\nu)$ задовольняє рівняння

$$L(t,\ )=(\ -1)\cdot L(t,\ ). \qquad (7)$$

Отже, остаточний вигляд розподілу потужності за технологіями $m(t,x)$, який є розв'язком рівняння (5) із граничною умовою (4), є таким

$$m(t,x)=\frac{\ ^{t}\cdot L(0,\ )}{\ }\cdot\prod_{l=v+1}^{x-1}\left[1-\frac{2\ +\ -1}{\ \cdot(l-1)}\right]. \qquad (8)$$

Попереднє співвідношення дозволяє також описувати залежність розподілу потужності за технологією від зміни самої технології. Іншими словами, справедлива така закономірність

$$m(t,x)=m(t,\ )\cdot\prod_{l=v+1}^{x-1}\left[1-\frac{2\ +\ -1}{\ \cdot(l-1)}\right], \qquad (9)$$

зокрема,

$$m(t,x+1)=m(t,x)\cdot\left[1-\frac{2\ +\ -1}{\ \cdot(x-1)}\right],$$

у якій вказано коефіцієнти переходу при зміні величини технології.

Для того, щоб множники у наведених формулах (8) і (9) були додатними величинами, треба забезпечити виконання нерівності $n>3+(\gamma-1)/\mu$. Ця нерівність пов'язує між собою коефіцієнти зносу μ та темпу зростання потужності γ із величиною витрат технології ν.

Тепер залишилося зауважити, що сама потужність виробництва із врахуванням її зносу і наявністю виробничих витрат як розв'язок вихідного рівняння (1) із граничною умовою (2) записується у вигляді суми

$$M(t,x)=\sum_{j=\nu+1}^{x} m(t,j), \qquad (10)$$

або суми

$$M(t,x)=\frac{\gamma^{t}\times L(0,\nu)}{\nu}\times\sum_{j=\nu+1}^{x}\prod_{l=\nu}^{j-1}\left[1-\frac{2\mu+\gamma-1}{\mu\times(l-1)}\right], \qquad (11)$$

у якій розподіл потужності $m(t,j)$ слід умовно домножувати на одиницю виміру технології $[h]$ для того, щоб забезпечити перехід від її розмірності – $[\pi/h]$ до розмірності π – в одиницях продукту виробництва, в яких вимірюється потужність. Зокрема, у нульовий момент часу потужність визначається сумою

$$M(0,x)=\sum_{j=v+1}^{x}u(j).$$

Зміст параметра γ як темпу зростання потужності визначається за такими рівностями

$$M(t,x)=\sum_{j=v+1}^{k}m(t,j)=\gamma^{t}\sum_{j=v+1}^{k}u(j)=\gamma^{t}\cdot M(0,x), \qquad (12)$$

яким задовольняє потужність $M(t,x)$ при будь-якому значенні технології x. Розглянемо більш уважніше останнє співвідношення. Для цього введемо поняття сумарної потужності виробництва

$$\mathbf{M}(t) = \sum_{k=\nu}^{N} m(t,x), \tag{13}$$

а також початкового значення сумарної потужності виробництва

$$\mathbf{M}(0) = \sum_{k=\nu}^{N} m(0,x), \tag{14}$$

де підсумовування ведеться за всіма можливими значеннями технологій $x = \nu, (\nu+1), (\nu+2), \ldots, N$. Виявляється, що $\mathbf{M}(0)$ також задовольняє рівності вигляду (12)

$$\mathbf{M}(t) = \gamma^{t} \times \mathbf{M}(0). \tag{15}$$

Рівність (15) означає, що сумарна потужність виробництва $\mathbf{M}(t)$ при заданому початковому значенні $\mathbf{M}(0)$ для решти періодів часу $t = 1, 2, \ldots$ визначається із такого рівняння

$$\Delta\mathbf{M}(t) = (\gamma - 1) \times \mathbf{M}(t). \tag{16}$$

Крім того, з рівностей (12) і (15) випливає, що при значенні параметра $\gamma > 1$ потужність виробництва зростає, при $\gamma = 1$ потужність не змінюється з часом і дорівнює своєму початковому значенню і, нарешті, при $\gamma < 1$ потужність спадає.

Як видно, для планування росту потужності на основі формули (10) необхідно знати величину коефіцієнта зносу потужності μ, величину виробничих витрат $L(t,\nu)$ і відповідні їм технологічні витрати ν, а також величину темпу зростання γ.

Далі треба розвинути метод визначення параметрів ν і γ з умов максимізації прибутку виробництва. Нехай далі: $[g]$ – грошова одиниця, p – ціна продукту виробництва Y, s – ціна технології x, тобто s – ціна змінного виробничого фактора, який використовується виробництвом. Розмірності названих цін такі: $\left[\frac{g}{\pi}\right]$ – одиниця виміру ціни продукту p; $\left[\frac{g}{\pi \times h}\right]$ – одиниця виміру ціни технології s; Наприклад, $\left[\frac{g}{\pi}\right] = \frac{гривня}{тонна}$, $\left[\frac{g}{\pi}\right] = \frac{гривня}{кіловат\text{-}година}$, $\left[\frac{g}{\pi}\right] = \frac{гривня}{кубометр}$, $\left[\frac{g}{\pi \times h}\right] = \frac{гривня}{тонна \times трудомісткість}$, $\left[\frac{g}{\pi \times h}\right] = \frac{гривня}{кубометр \times енергомісткість}$, $\left[\frac{g}{\pi \times h}\right] = \frac{гривня}{кіловат\text{-}година \times фондомісткість}$. Іншими словами, ціна продукту виробництва – це кількість грошей за одиницю продукту, а ціна технології – це кількість грошей, приведена до одиниці продукту і до одиниці технології.

Надалі використовуємо природне припущення, що на виробництві ведеться облік витрат технології і при цьому реалізуються тільки такі витрати, які є прибутковими. Математично це записується у вигляді нерівності

$$p - s \times x > 0 \text{ або, що те саме } s \times x / p < 1, \tag{17}$$

якій повинні задовольняти величини p, s, x. Перша з нерівностей виконується у розмірності $[g/\pi]$ ціни продукту. Друга – в безрозмірних величинах.

Нерівність (17) трансформується в таку умову прибутковості виробництва: виробництво здійснює тільки такі витрати технології

$$x = \nu, (\nu+1), \ldots, (p/s - 1). \tag{18}$$

Тепер можна уточнити кількість доданків у формулі (13) для обчислення сумарної потужності виробництва $\mathbf{M}(t)$ і у формулі (14) для її початкового значення $\mathbf{M}(0)$. А саме, числове значення сумарної потужності виробництва та її початкового за часом значення при заданих цінах p і s обчислюється у вигляді наступних сум

$$\mathbf{M}(t) = \sum_{k=x}^{p/s-1} m(t,x), \quad \mathbf{M}(0) = \sum_{k=x}^{p/s-1} m(0,x), \tag{19}$$

де розподіл потужності за технологіями $m(t,x)$ і його початкове значення $m(0,x)$ вже визначені раніше за формулою (8). Повертаючись до формули (11), зазначимо, що сумарна потужність виробництва $\mathbf{M}(t)$ може бути визначена як значення потужності $M(t,x)$ при найбільш прибуткових витратах технології x, тобто, за допомогою рівності

$$\mathbf{M}(t) = M(t,x)|_{x=p/s-1}, \tag{20}$$

у якій числова величина $M(t,x)$ задана співвідношенням

$$M(t,x) = \frac{\gamma^t \times L(0,x)}{x} \times \sum_{j=\nu+1}^{x} \prod_{l=\nu}^{j-1} \left[1 - \frac{2\mu + \gamma - 1}{\mu \times (l-1)}\right]. \tag{21}$$

Тепер можна ввести функцію сумарних виробничих витрат

$$\mathbf{L}(t) = \sum_{x=\nu}^{p/s-1} x \times m(t,x). \tag{22}$$

Як видно, значення цієї функції вимірюються в одиницях $[\pi \times h]$. Із співвідношення (6) випливає, що функція виробничих витрат має властивість

$$\mathbf{L}(t,\nu) = \gamma^t \times \mathbf{L}(0,\nu), \tag{23}$$

де $\mathbf{L}(0,\nu)$ – значення функції виробничих витрат у початковий момент часу. Звідси випливає, що функція виробничих витрат $\mathbf{L}(t,\nu)$ задовольняє рівняння

$$\Delta\mathbf{L}(t,\nu) = (\gamma - 1)\mathbf{L}(t,\nu). \tag{24}$$

Визначивши величину сумарної потужності виробництва в одиницях його продукту $[\pi]$ і сумарну величину виробничих витрат в одиницях $[\pi \times h]$, а також знаючи ціну продукту p та ціну витрат технології x, ми можемо знайти сумарний прибуток виробництва у вигляді функції, залежної від часу

$$\Pi(t,p,s) = p \times \mathbf{M}(t) - s \times \mathbf{L}(t),$$

величина якої вимірюється вже в грошових одиницях $[g]$. Використовуючи вже відомі вирази для сумарної потужності виробництва $M(t)$ у вигляді суми (19) і для сумарних виробничих витрат у вигляді суми (22), отримуємо остаточну залежність динаміки сумарного прибутку від основних параметрів самого виробництва

$$\Pi(t,p,s) = \sum_{x=\nu}^{p/s-1} (p - s \times x) \times m(t,x). \tag{25}$$

Функція $\Pi(t,p,s)$, задана формулою (25), називається функцією сумарного прибутку. Ще раз нагадаємо, що величина розподілу потужності $m(t,x)$, через яку ця функція виражена, може бути обчислена на основі співвідношення (8). Неважко побачити, що справедливі такі співвідношення

$$\mathbf{M}(t) = \frac{\Pi(t,p+1,s) - \Pi(t,p,s)}{1\left[\frac{g}{\pi}\right]}, \quad \mathbf{L}(t) = \frac{\Pi(t,p,s+1) - \Pi(t,p,s)}{1\left[\frac{g}{\pi \times h}\right]}$$

в яких у знаменнику дробу поставлено відповідні одиниці вимірювання цін продукту та витрат технології. Безпосередній економічний зміст першого із них полягає в тому, що сумарна потужність виробництва становить частку величини приросту прибутку у розрахунку на одиницю ціни продукту. Зміст другого в тому, що сумарні виробничі витрати становлять частку величини приросту прибутку у розрахунку на одиницю ціни витрат цієї технології.

Це означає, що функція (19) повністю характеризує пропозицію продукту на ринку, через що її можна називати функцією пропозиції виробництва. Функція ж (22), в свою чергу, характеризує попит на змінний виробничий фактор (величину технології) на ринку, і тому її можна називати функцією попиту виробництва.

Дослідимо динаміку статистичних розподілів прибутку, попиту та пропозиції. Зрозуміло, що величина продукту виробництва є залежною від часу t, від технології x і від виробничих витрат L на ці технології. Ми це записуємо у вигляді функції $Y(t,x,L)$.

Потужність виробництва у кожний період часу t використовується не повністю, а з деяким коефіцієнтом завантаження. А саме, при фіксованих цінах p – продукту та s – технології повинна виконуватися рівність

$$Y(t,x,L) = f(t,x,L)\times \mathbf{M}(t), \tag{26}$$

де $f(t,x,L)$ – коефіцієнт завантаження потужностей, який залежить від виробничих витрат L, технології x, часу t і є безрозмірною величиною. Коефіцієнт $f(t,x,L)$ називають виробничою функцією. Обчислимо значення такої функції *за умови, що виробництво у процесі своєї діяльності максимізує свій прибуток* $\Pi(t,x,s)$ *при заданих цінах* p *та* s, які характеризують ринок продуктів та ринок виробничих факторів. Математично це означає, що потрібно розв'язати таку задачу на знаходження максимуму

$$\Pi(t,x,s) = \max_{\nu\le x\le i-1}\left[p\times f(t,x,L)\times \mathbf{M}(t) - s\times L\right], \tag{27}$$

у якій $f(t,x,L)$ є невідомим і $x=\nu,\nu+1,\ldots$. Враховуючи вигляд $m(t,x)=\gamma^{t}\times u(x)$, ця задача зводиться до такої

$$\gamma^{-t}\times\Pi(t,p,s) = \max_{\nu\le x\le p/s-1}\left[p\times\gamma^{-t}\times f(t,x,L)\times\mathbf{M}(t) - s\times\left(\gamma^{-t}\times L\right)\right],$$

у якій функція $\gamma^{-t}\times\Pi(t,p,s)$ вже не залежить від часу t. Позначимо

$$\Lambda = \gamma^{-t}\times L,\quad F = \gamma^{-t}\times f(t,x,L)\times\mathbf{M}(t).$$

Відомо, що функція F, яка є розв'язком попередньої задачі, зв'язана із функцією $\gamma^{-t}\times\Pi(t,p,s)$ перетворенням Лежандра

$$F = \min\left[\gamma^{-t}\times\Pi(t,p,s) + s\times\Lambda\right]/p.$$

Останню задачу вже можна розв'язати безпосередньо, а саме, $\min$ досягається за умови $x = p/s-1$, тобто $F = s\left[u(\nu)+\Lambda\right]/p$, або, повертаючись до старих позначень, одержуємо

$$f(t,\nu,L)\times\mathbf{M}(t) = \left[m(t,\nu)+L\right]s/p.$$

З граничної умови (4) отримуємо

$$s(\nu+1) = p \text{ та } m(t,\nu) = L(t,\nu)/\nu.$$

Підставляючи це у вираз для $f(t,\nu,L)$ і враховуючи формули (6) та (15), що виражають функції $\mathbf{M}(t)$ і $L(t,x)$ через їх початкові значення, отримуємо такий вираз виробничої функції

$$f(\nu,L) = \frac{L(0,\nu)}{\nu\times\mathbf{M}(0)}, \tag{28}$$

у якій вже не вказується її залежність від часу, оскільки насправді у даній моделі вона від нього не залежить. Тепер, підставляючи її вираз (28) в означення (26 виробничої функції, отримуємо такі рівності

$$Y(t,\nu,L) = \frac{\gamma^t \times L(0,\nu)}{\nu} = \frac{L(t,\nu)}{\nu} = m(t,\nu) \quad (29)$$

які виражають обсяги виробництва через основні параметри – технологічні та виробничі витрати. Ми також можемо записати точну формулу для прибутку. Для цього досить у співвідношення (27) підставити вираз виробничої функції (28), (29) за умови, що $x = p/s - 1$. Тоді

$$\Pi(t,p,s) = \frac{p \times \gamma^t \times m(0,\nu)}{1+x}$$ – функція прибутку.

Функція пропозиції продукту набуває вигляду

$$m(t,x) = \gamma^t \times m(0,x).$$

Функцію попиту на технологію можна подати у вигляді

$$x \times m(t,x) = \gamma^t \times x \times m(0,x).$$

Зрозуміло, що виконується рівність

$$\Pi(t,p,s) = \gamma^t \times \Pi(0,p,s).$$

Формулу (27) можна також записати у вигляді

$$\Pi(t,p,s) = p \times Y(t,\nu,L) - s \times L(t,\nu) = Y(t,\nu,L) \times [p - s \times \nu].$$

З останнього співвідношення видно, що $s \times L(t,\nu)$ – витрати виробництва, виражені у грошах. Більше того, справедливою є рівність

$$s \times L(t,\nu) = \nu \times \Pi(t,p,s),$$

яка означає, що величина ν є оберненим значенням коефіцієнта рентабельності виробництва відносно даного виробничого фактора – технології. Справді,

$$\frac{\Pi(t,p,s)}{s \cdot L(t,\nu)} = \frac{Y(t,\nu,L) \cdot [p - s \cdot \nu]}{s \cdot \nu \cdot Y(t,\nu,L)} = \frac{p - s \cdot \nu}{s \cdot \nu} = \frac{s}{s \cdot \nu} = \frac{1}{\nu}.$$

Обчислимо динаміку параметрів моделі для деяких виробництв України на основі місячних статистичних даних 2000 р. За одиницю вимірювання технології візьмемо обернену величину до одиниці рентабельності виробництва. Тоді величина $s \times n$ означає собівартість продукту, а $s \times L(0,\nu)$ – виробничі витрати у вартісному виразі.

Динаміка показників виробництва бензину та дизпалива

Місяці	$Y(t,n,L)$ (тис. т.)	$s \cdot L(t,n)$ (тис. грн.)	$\Pi(t,p,s,L)$ (тис. грн.)	Місяці	$Y(t,n,L)$ (тис. т.)	$s \cdot L(t,n)$ (тис. грн.)	$\Pi(t,p,s,L)$ (тис. грн.)
1	241	78 872	17 318	1	340	99 309	22 651
2	222	72 594	15 940	2	226	65 963	15 045
3	214	69 847	15 337	3	277	80 796	18 428
4	222	72 627	15 947	4	285	83 074	18 948
5	249	81 390	17 871	5	333	97 148	22 158
6	254	82 927	18 208	6	350	102 054	26 277
7	220	71 940	15 796	7	432	126 202	28 785
8	271	88 748	19 487	8	366	106 989	24 402
9	231	75 668	16 615	9	318	92 798	21 165
10	193	62 980	13 829	10	306	79 469	20 406
11	216	70 632	15 509	11	297	86 636	19 760
12	243	79 461	17 447	12	324	94 608	21 578

Висновки. Досліджено динаміку ряду ринкових показників виробничих підприємств, зокрема таких як величина сумарного прибутку, попит на виробничий фактор. Показники наведено у вигляді статистичних розподілів за виробничим фактором у вартісному виразі, а також в одиницях продукту. Результати розробки апробовано на статистичних даних діяльності ряду виробництв нафтопереробної галузі.

Запропонованою моделлю можна описувати багато інших виробничих галузей, наприклад, енергетичну, сталеплавильну, алюмінієву, а також більшість видобувних галузей та їх окремі підприємства. Зазначимо, що існують методи зведення багатопродуктових економіко-математичних моделей до дослідження однопродуктових, тому це дозволяє ще розширити сферу застосування розглянутої моделі.

1. Houthakker H. S. The Pareto distribution and the Coob-Douglas production function in activity analysis// The Review of Economic Studies 23, 1955–56. – P. 27–31. 2. Йохансен Л. Очерки макроэкономического планирования. – М: Прогресс, 1982, Т.1,2. 3. Johansen L. Production Functions. An Integration of Micro and Macro, Short Run and Long Run Aspects. – North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London, 1972. 4. Іващук Н.Л., Солінська М. Дослідження динаміки фінансових показників виробничих галузей // Вісник Національного університету "Львівська політехніка": – 2003. – № 478. – С.115–119. 5. Столерю Л. Равновесие и экономический рост.– М: Статистика, 1974.

УДК 658.29

З.О. Коваль
Національний університет „Львівська політехніка”

ВИКОРИСТАННЯ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ ТА МОДЕЛЕЙ ПРИ ОЦІНЦІ ЕФЕКТИВНОСТІ ВЗАЄМОЗВ’ЯЗКІВ ПІДПРИЄМСТВА ЗІ СПОЖИВАЧАМИ

Запропоновано і досліджено можливості використання економіко-математичних методів та моделей при оцінці ефективності та надійності взаємозв’язків із споживачами продукції.

The possibilities of using of economically mathematical methods and models with valuation of efficacy and reliability of the interconnections with the consumers of product are proposed and researched in this article.

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями. Прагнення до ефективної діяльності вимагає від підприємства постійного пошуку методів встановлення та утримання взаємозв’язків зі споживачами. Проте в умовах швидкозмінного зовнішнього середовища цього недостатньо, тому виникає необхідність систематичного аналізу та оцінки взаємозв’язків зі споживачами, враховуючи зміну у часі таких факторів, як попит, витрати, ринкова кон’юнктура та інші. За допомогою прогнозування і врахування цих змін, аналізу та оцінки рівня ефективності управління взаємозв’язками з споживачами з використанням економіко-математичних і статистичних методів, підприємство-виробник зможе підвищити надійність зв’язків із споживачами, знизити витрати на торговельну діяльність, досягти значних конкурентних переваг. Про це свідчать як результати проведеного нами дослідження, так і аналіз останніх наукових публікацій.