

Inverse Problem of Calculus of Variations in Modeling the Dynamics of the Wind Turbine

Vitaliy Korendiy

Chair of Mechanics and Automation of Machine Building,
Lviv Polytechnic National University, UKRAINE, Lviv,
Profesorska Street 1, E-mail: vitaliy_korendiy@mail.ru

The expediency of investigation inverse problems of calculus of variations is proved in the article. Their importance for the theory of optimal management and different phenomena of mechanical world are shown. We take inverse problem of optimization of the angle of attack of blades of the wind wheel in order to get the greatest power take-off from the air flow as for instance. The purpose of this problem is to deduce the functional (6) for calculation the nominal power of the wind turbine. And we know only the optimal dependence (1) of the angle of attack of the blade from the radius of the wind wheel.

The procedure of derivation of the functional using some function is carried into practice in two ways: a) derivation the differential equation from this function (3, 4); b) we suppose, that found equation (5) is Euler equation for some functional, make some transformations and find the general form of the functional (6), which generates this equation.

Обернена задача варіаційного числення при моделюванні динаміки вітроустановки

Віталій Корендій

Кафедра механіки та автоматизації машинобудування,
Національний університет "Львівська політехніка",
УКРАЇНА, м. Львів, вул. Професорська, 1,
E-mail: vitaliy_korendiy@mail.ru

Обернені задачі варіаційного числення на даний час залишаються мало вивченими, хоча й широко використовуються в механіці, теорії оптимального керування та інших технічних і економічних задачах. У доповіді подано розв'язання такої задачі для визначення номінальної потужності вітроустановки при заданій залежності оптимального кута атаки лопаті від радіуса вітроколеса.

Ключові слова – функція, рівняння Ейлера, функціонал, варіаційна задача, екстремум.

I. Вступ

Варіаційні методи дійшли досить високого ступеня розвитку, широко і ефективно використовуються в механіці, теорії оптимального керування, при розв'язуванні сучасних технічних задач тощо. На даний час із залученням різних систем аналітичних розрахунків застосовуються алгоритми (стратегії пошуку) розв'язків варіаційних задач для різних типів функціоналів, які залежать від декількох функцій, похідних вищого порядку тощо. Якщо пряма задача варіаційного числення полягає в пошуку екстремуму функціонала, то оберненою задачею є знаходження функціонала за диференціальним рівнянням. Задачі такого типу і до цього моменту потребують значної уваги. Більш широка постановка оберненої задачі («реверсійне числення») полягає у відновленні функціонала за заданою функцією.

Якщо до сьогоднішнього дня опис руху об'єктів механічного світу (з використанням теоретичної та прикладної механіки) був ефективним перш за все за допомогою диференціальних рівнянь, то наближається час, коли відображення не тільки механічного світу, але й інших форм руху матерії, буде доцільнішим, простішим та зрозумілішим завдяки функціоналам.

Функціонали, як відомо, відображають явища, процеси і стани різноманітних систем. На прикладі моделювання роботи та дослідження силових параметрів вітроустановки проілюструємо процедуру відновлення функціоналів за заданими аналітичними функціями.

У найбільш простому вигляді ця процедура передбачає: а) отримання диференціального рівняння за заданою функцією; б) припускаючи, що отримане рівняння є рівнянням Ейлера для деякого функціонала, здійснення перетворень, які приводять до знаходження функціонала, що породжує це рівняння.

II. Теоретичні аспекти дослідження

Дотримуючись висловлювання І. Ньютона «при вивченні наук приклади корисніші за правила» [2], наведемо приклад розв'язку оберненої задачі оптимізації кута атаки лопатей вітроколеса з метою максимізації відбору потужності з потоків повітря.

Нехай задана неперервна диференційована функція

$$a_r = e^{-kr} (A_1 r + A_2), \quad (1)$$

яка виражає оптимальне значення кута атаки a_r лопатей від радіуса r вітроколеса при заданій кількості лопатей k , де A_1 і A_2 – сталі коефіцієнти, які залежать від конструкції вітроколеса. Необхідно знайти функціонал, якому функція (1) надає екстремум. З точки зору динаміки вітроколеса потрібно знайти функціональну залежність номінальної потужності вітроустановки наступного вигляду:

$$N_{ном} = \int_0^R F \left(r, \alpha_r, \frac{d\alpha_r}{dr} \right) dr, \quad (2)$$

де R – зовнішній радіус вітроколеса.

Цю задачу будемо розв'язувати у два кроки. Спершу знайдемо диференціальне рівняння за його розв'язком (1) [1]. Запишемо похідні функції (1):

$$\frac{da_r}{dr} = -ke^{-kr} (A_1 r + A_2) + e^{-kr} A_1, \quad (3)$$

$$\frac{d^2 a_r}{dr^2} = k^2 e^{-kr} (A_1 r + A_2) - 2ke^{-kr} A_1.$$

Із першого рівняння (3) визначаємо $e^{-kr} A_1$

$$e^{-kr} A_1 = \frac{da_r}{dr} + ke^{-kr} (A_1 r + A_2) \quad (4)$$

і підставляємо (4) у друге рівняння (3). Після деяких перетворень отримуємо однорідне диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

$$\frac{d^2 a_r}{dr^2} + 2k \frac{da_r}{dr} + k^2 a_r = 0. \quad (5)$$

На другому кроці ми робимо висновок, що диференціальне рівняння (5) є рівнянням Ейлера [4] для функціонала з підінтегральною функцією

$$F \left(r, \alpha_r, \frac{d\alpha_r}{dr} \right): \left(\frac{d^2 a_r}{dr^2} + 2k \frac{da_r}{dr} + k^2 a_r \right) e^{2kr} = 0.$$

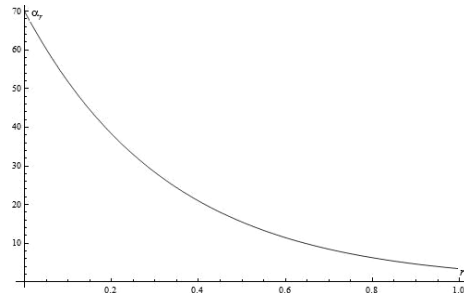
$$\text{Тоді } F_{a_r} = -k^2 a_r e^{2kr} = 0, \quad \frac{d}{dr} F_{a_r} = \left(2k \frac{da_r}{dr} + k^2 a_r \right) e^{2kr}.$$

Шуканий функціонал прийме вигляд:

$$N_{ном} = \int_0^R \frac{\left(\frac{d\alpha_r}{dr} \right)^2 - k^2 \alpha_r^2}{2} e^{2kr} dr = \text{extr}. \quad (6)$$

Перевірка (обчислення першої варіації) підтверджує коректність розглянутої процедури відновлення функціонала (6) за функцією (1), однак проблема єдності розв'язку потребує спеціального обґрунтування [3].

Для прикладу прийємо $A_1 = -1$, $A_2 = 70$, $k = 3$, $R = 1$. Тоді оптимальний профіль лопаті матиме вигляд, зображений на рисунку, а номінальна потужність вітроустановки становитиме $N_{ном} = 209$ Вт.



Залежність оптимального кута атаки α_r лопаті від радіуса вітроколеса r .

Висновок

У роботі доведена доцільність дослідження обернених задач варіаційного числення, вказано на їх важливість для теорії оптимального управління та явищ механічного світу. Як приклад взято обернену задачу оптимізації кута атаки лопатей вітроколеса з метою максимізації відбору потужності з потоків повітря, зміст якої полягає у тому, що, знаючи оптимальну залежність кута атаки лопаті від радіуса вітроколеса (1), можна вивести функціонал (6) для визначення номінальної потужності вітроустановки.

Процедура відновлення функціонала за заданою функцією, яка надає йому екстремум, здійснювалася наступними етапами: а) отримання диференціального рівняння за заданою функцією (3, 4); б) припускаючи, що отримане рівняння (5) є рівнянням Ейлера для деякого функціонала, здійснення перетворень, які приводять до знаходження функціонала (6), що породжує це рівняння.

Література

- [1] Бохонский А.И. Задачи восстановления функционалов по функциям // Вісник СевНТУ. 2010. №106. С. 50-53.
- [2] Маригодов В.К., Тихонов Г.А. Решение обратной вариационной задачи // Оптимізація виробничих процесів. 2010. № 12. С. 168-170.
- [3] Бохонский А.И. Множитель Лагранжа в вариационной задаче на условный экстремум функционала // Вісник СевНТУ. 2010. № 108. С. 106-109.
- [4] Бохонский А.И. Отражение мира в функционалах // Оптимізація виробничих процесів. 2010. № 12. С. 5-8.