УДК 511.315, 512.622.86
В.Самотий[1,2], У.Дзелендзяк[1]
1 Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра комп'ютеризованих систем автоматики
2 Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki,
Katedra Automatyki i Technik Informacyjnych

ВЛАСТИВОСТІ АЛГОРИТМУ ФІБОНАЧЧІ, ЗОЛОТОГО СІЧЕННЯ ТА СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ

Італійський математик Леонардо з Пізи за прізвиськом Фібоначчі (що в перекладі означає син Боначчі) в 1202 р. написав книжку „Liber abacci" („Книга про абаку") [1]. З цієї книжки європейці вперше познайомились з індуськими („арабськими") цифрами, а також з послідовністю Фібоначчі.

Запишемо послідовність Фібоначчі

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3,\ F_5 = 5,\ F_6 = 8,\ F_7 = 13,\ F_8 = 21,$$
$$F_9 = 34,\ \ldots,\ F_{77} = 5527939700884757,\ F_{78} = 8944394323791464,\ \ldots$$

Загальна формула побудови цієї послідовності є такою

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n = 2,\ 3,\ \ldots,\ F_0 = 0,\ F_1 = 1. \tag{1}$$

Поділивши F_{n-1} / F_n отримаємо золоте січення.

Виявляється, що немає значення чи буде ця послідовність складатися з цілих чисел, чи з дійсних чисел відношення F_{n-1} / F_n завжди буде давати золоте січення, яке є неперіодичним ірраціональним числом. І чим більшою буде кількість кроків N тим точніше можна обчислити золоте січення. Наприклад, взявши з послідовності Фібоначчі відношення F_4 / F_5=3/5=0.6, а збільшивши N до 78 маємо

$$F_{77} / F_{78} = 5527939700884757 / 8944394323791464 \approx 0.618033988749894848204 58. \tag{2}$$

Немає також жодного значення якими будуть стартові значення F_0, F_1. Вони можуть бути навіть дійсними числами. Більше того можна навіть прийняти $F_0 > F_1$. Наприклад, нехай $F_0 = 120.4$, $F_1 = 13.8$. Тоді згідно (1) можна побудувати таку послідовність

134.2, 148, 282.2, 430.2, 712.4, 1142.6, 1855, 2997.6, 4852.6, 7850.2,
12702.8 20553, 33255.8, 53808.8, 87064.6, 140873.4, 227938,
368811.4, 596749.4, 965560.8, …

Поділивши два останні числа ми знову отримуємо золоте січення з певним наближенням, яке залежить від кількості членів послідовності

$$F_{18} / F_{19} = 596749.4/965560.8 \approx 0.6180339964. \tag{3}$$

Позначимо золоте січення

$$Z \approx 0.618\ 033\ 988\ 749\ 894\ 848\ 204. \tag{4}$$

Введемо позначення різниці

$$R = 1 - Z \approx 0.381\ 966\ 011\ 250\ 105\ 151\ 796, \tag{5}$$

а також позначення дільника

$$D = 1/ Z \approx 1.618\ 033\ 988\ 749\ 894\ 848\ 204. \tag{6}$$

Розглянемо деякі властивості степеневих рядів що містять аргумент золоте січення, або різницю. Для золотого січення справедливою буде залежність

$$\sum_{k=1}^{\infty} Z^k = 1/ Z = D = 1 + Z\ . \tag{7}$$

Віднявши від цієї суми Z, тобто перший член ряду, а потім другий Z^2, отримаємо

$$\sum_{k=2}^{\infty} Z^k = 1, \qquad \sum_{k=3}^{\infty} Z^k = Z. \tag{8}$$

Ці міркування можна продовжити і визначити будь-яку часткову суму. Запишемо згруповано отримані результати

$$\sum_{k=n}^{\infty} Z^k = (-1)^{n-1}\left(F_{n-2}Z - F_{n-3}\right),\ n = 3,\ 4,\ 5,\ \dots. \tag{9}$$

На практиці це зручно з огляду на заощадження машинного часу. Бо немає необхідності обчислювати суму степеневого ряду, якщо її можна замінити одним виразом.

Якщо побудувати суму аналогічну (9) для різниць, отримаємо

$$\sum_{k=n}^{\infty} R^k = F_{2n-1}Z - F_{2n-2},\ n = 1,\ 2,\ \dots \tag{10}$$

Ці виведення дають ще один набір виразів, а саме

$$\sum_{k=1}^{n} R^k = F_{2n} - \left(F_{2n+1} - 1\right)Z,\ n = 1,\ 2,\ \dots. \tag{11}$$

Якщо порівняти вирази (9) і (10), то можна зауважити таку закономірність

$$\sum_{k=2n+1}^{\infty} Z^k = \sum_{k=n}^{\infty} R^k,\ n = 1,\ 2,\ \dots \tag{12}$$

Слід зауважити, що крім золотого січення Z яке згідно (8) при додаванні степеневих рядів дає одиницю, можна побудувати інші степеневі ряди, які також при додаванні будуть асимптотично наближатися до одиниці, наприклад

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1. \tag{13}$$

Наступна формула справедлива для 1/3, а саме

$$2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = 1. \tag{14}$$

Проаналізувавши отримані суми можна записати загальну формулу

$$(N-1)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{N^k} = 1. \tag{15}$$

Можна зробити більш загальний висновок: формула (15) справедлива для всіх дійсних (а не лише цілих) N які задовольняють умову $N \ge 2$.

Дослідимо залежності, коли $1 < N < 2$.

$$(1/N)\sum_{k=1}^{\infty} (1 + 1/N)^{-k} = 1. \tag{16}$$

Виявляється ця формула охоплює вище написані, а саме (13)-(15). Тут N >0 є дійсним числом. Формулу (16) можна записати в іншому вигляді

$$(1/N)\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{N}{1+N}\right]^k = 1. \tag{17}$$

Цю формулу можна записати ще в більш загальному вигляді

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{N}{M+N}\right]^k = \frac{N}{M}, \tag{18}$$

де M >0 – дійсне додатне число.

1. Sigler L.E. Fibonacci's Liber Abaci, Leonardo Pisano's Book of Calculations. Springer, New York, 2002.