

ЗВОРОТНЄ РОЗСІЯННЯ МАЛИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ У АКУСТИЧНОМУ ПОЛІ

© Андрійчук М. І., Ткачук В. П., 2011

Поєднання асимптотичного підходу і числового моделювання використовується для розв'язання задачі про зворотнє розсіяння малими включеннями, розміщеними у рідинному середовищі. Початкова дифракційна задача розглядається за припущень $ka \ll 1$, $d \gg a$, де a – радіус включень, а d – відстань між ними. Довжина хвилі співмірна з розміром декількох включень. На поверхні включень задаються граничні умови імпедансного типу. Результати числового моделювання узгоджуються з теоретичними результатами. На базі отриманих числових розрахунків сформульовано низку конструктивних висновків, які дають можливість використовувати отримані результати під час моделювання вимірювальних і пошукових систем у радіо- та комунікаційних застосуваннях.

Ключові слова: акустичне поле, мале включення, асимптотичний підхід, числове моделювання.

A combination of asymptotic approach and computational modeling is used for solution of problem to investigate the backscattering of several small particles embedded in fluid medium. The initial diffraction problem of wave scattering by many small particles is developed under the assumption $ka \ll 1$, $d \gg a$, where a is radius of particles and d is the distance between the neighboring particles. On the wavelength one may have many small particles. Impedance boundary conditions are assumed on the boundaries of small particles. The results of numerical simulation show good agreement with the theory. A series of constructive conclusions on the basis of received numerical results open a way to engineering realization of measurement and search systems in the communication applications.

Key words: acoustic field, small particle, asymptotic approach, computational modeling.

Вступ

Дослідження фізичних явищ, які виникають під час дифракції акустичних та електромагнітних хвиль на сукупності розсіювачів малого розміру є важливим у багатьох інженерних застосуваннях [1–3]. У цих випадках, як правило, багатохвильове розсіяння ускладнює зворотну задачу розсіяння, яка полягає у визначенні інформації про параметри розсіювачів або про розсіювальне середовище. Головне питання полягає у тому, як зміна відстані між розсіювальними об'єктами впливає на зворотну хвилю. Це розглянуто у статті на прикладі дослідження розсіяння у воді на сукупності повітряних включень малого радіуса. Запропонований підхід можна використати у розробленні вимірювальних і пошукових пристроїв для радіолокаційних систем.

Асимптотичний підхід, який враховує малий розмір об'єктів розсіяння, використовується для розв'язування початкової задачі і отримання явних представлень для компонент акустичного поля. Теорія розсіяння акустичних хвиль на тілах малого розміру розроблена у роботах відомого американського математика О.Г. Рамма [4]. Запропонований підхід дозволяє розраховувати компоненти розсіяного, зокрема, зворотного поля, а також моделювати середовища або матеріали із заданою просторовою дисперсією. При цьому можна отримати коефіцієнт відбиття $n^2(x, \omega)$ із заданою залежністю від частоти ω . Зокрема, можна створювати матеріали із від'ємним відбиттям, які широко застосовуються у різноманітних галузях телекомунікацій і зв'язку [5–9].

Асимптотичний розв'язок задачі розсіювання на сукупності тіл малого радіуса був запропонований у [10] за допущень $ka \ll 1$, $d = O(a^{1/3})$, $M = O(1/a)$, де a – радіус включення, $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число, d – відстань між включеннями, M – загальна кількість включень у деякій обмеженій області $D \subset R^3$. На поверхні S_m m -го включення D_m задано граничні умови імпедансного типу. У [11] ці припущення були узагальнені так:

$$\zeta_m = \frac{h(x_m)}{a^\kappa}, \quad d = O(a^{(2-\kappa)/3}), \quad M = O\left(\frac{1}{a^{2-\kappa}}\right), \quad \kappa \in (0,1), \quad (1)$$

де ζ_m – поверхневий імпеданс, $h_m = h(x_m)$, $x_m \in D_m$, а $h(x) \in C(D)$ – довільна неперервна у \bar{D} функція, $\text{Im} h \leq 0$.

Падаюче поле u_0 задовольняє рівняння Гельмгольца у R^3 , а розсіяне поле задовольняє умови випромінювання. Ми припускаємо, що параметр $\kappa \in (0,1)$, а мале включення D_m – куля радіусом a з центром у точці x_m , $1 \leq m \leq M$.

Розв'язок задачі розсіювання

Загальне поле задовольняє рівняння

$$[\nabla^2 + k^2 n_0^2(x)]u_M = 0 \quad \text{в } R^3 \setminus \bigcup_{m=1}^M D_m, \quad (2)$$

і граничні умови

$$\frac{\partial u_M}{\partial N} = \zeta_m u_M \quad \text{на } S_m, \quad 1 \leq m \leq M, \quad (3)$$

де

$$u_M = u_0 + v_M, \quad (4)$$

u_0 – розв'язок задачі (2), (3) при $M = 0$ (тобто за відсутності включень) і при падаючому полі $e^{ik\alpha \cdot x}$, а v_M задовольняє умови випромінювання.

Розв'язок задачі (2–4) – єдиний і подається у формі [11]

$$u_M(x) = u_0(x) + \sum_{m=1}^M \int_{S_m} G(x, y) \sigma_m(y) dy, \quad (5)$$

де $G(x, y)$ – функція Гріна рівняння Гельмгольца для випадку $M = 0$.

Визначимо “ефективне поле” u_e , яке розсіюється на m -му включенні

$$u_e(x) := u_e(x, a) := u_e^{(m)}(x) := u_M(x) - \int_{S_m} G(x, y) \sigma_m(y) dy, \quad x \in R^3. \quad (6)$$

Тут функція $\sigma_m(y)$ – точний розв'язок інтегрального рівняння, яке розв'язане у [11] за асимптотичних припущень $a \rightarrow 0$. Нехай $h(x) \in C(D)$ ($\text{Im} h \leq 0$) – довільна функція, $\Delta_p \subset D$ – довільна підобласть у D , а $N(\Delta_p)$ – кількість включень у Δ_p . Ми припускаємо, що

$$N(\Delta_p) = \frac{1}{a^{2-\kappa}} \int_{\Delta_p} N(x) dx [1 + o(1)], \quad a \rightarrow 0, \quad (7)$$

де $N(x) \geq 0$ – задана неперервна функція у D . У [11] було показано, що існує границя $u(x)$ поля $u_e(x)$ при $a \rightarrow 0$:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \|u_e(x) - u(x)\|_{C(D)} = 0, \quad (8)$$

а $u(x)$ – розв'язок такого рівняння:

$$u(x) = u_0(x) - 4\pi \int_D G(x, y) h(y) N(y) u(y) dy. \quad (9)$$

Це рівняння отримано у [11] для граничного ефективного поля у середовищі, яке сформоване включенням сукупності малих включень із заданим законом розподілу (7).

Наближене подання ефективного поля

Виведемо явну формулу для ефективного поля u_e . Для цього перепишемо точну формулу (5) так:

$$u_M(x) = u_0(x) + \sum_{m=1}^M G(x, x_m) Q_m + \sum_{m=1}^M \int_{S_m} [G(x, y) - G(x, x_m)] \sigma_m(y) dy, \quad (10)$$

де

$$Q_m = \int_{S_m} \sigma_m(y) dy. \quad (11)$$

Використовуючи відому оцінку для $G(x, y)$ [10] і асимптотичну формулу для Q_m із [11], перепишемо точну формулу (10) у вигляді

$$u_M(x) = u_0(x) + \sum_{m=1}^M G(x, x_m) Q_m + o(1), \quad a \rightarrow 0, \quad |x - x_m| \geq a. \quad (12)$$

Величини $Q_m(x)$ вираховуються за асимптотичною формулою

$$Q_m = -4\pi h(x_m) u_e(x_m) a^{2-\kappa} [1 + o(1)], \quad a \rightarrow 0, \quad (13)$$

а асимптотична формула для σ_m така:

$$\sigma_m = -\frac{h(x_m) u_e(x_m)}{a^\kappa} [1 + o(1)], \quad a \rightarrow 0. \quad (14)$$

Враховуючи (12) і (14), остаточно формулу для $u_e(x)$ запишемо у вигляді

$$u_e^{(j)}(x) = u_0(x) - 4\pi \sum_{m=1, m \neq j}^M G(x, x_m) h(x_m) u_e(x_m) a^{2-\kappa} \times [1 + o(1)]. \quad (15)$$

Рівняння (9) для граничного ефективного поля $u(x)$ використовується при числових розрахунках за доволі великих M , наприклад при $M = 10^b, b > 5$. Мета наступних обчислювальних експериментів – дослідити властивості розв'язків рівняння (9) і порівняти їх із асимптотичною формулою (15) для встановлення меж застосовності асимптотичного підходу до розв'язування задачі розсіювання на багатьох включеннях.

Зведення задачі розсіювання до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Для знаходження поля за формулою (15) необхідно мати величини $u_m := u_e(x_m)$. Ці величини отримуються внаслідок розв'язування лінійної алгебраїчної системи рівнянь

$$u_j = u_{0j} - 4\pi \sum_{m=1, m \neq j}^M G(x_j, x_m) h(x_m) u_m a^{2-\kappa}, \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (16)$$

Ця система є зручною для числового розв'язання, оскільки вона містить на діагоналі переважаючі елементи. Крім того, у [10] доведено, що при достатньо малих a вона має єдиний розв'язок.

Для знаходження розв'язку граничного рівняння (9) використовується метод колокацій [12], для якого відповідна система лінійних алгебраїчних рівнянь має вигляд

$$u_j = u_{0j} - 4\pi \sum_{p=1, p \neq j}^P G(x_j, x_p) h(y_p) N(y_p) u_p |\Delta_p|, \quad p = 1, 2, \dots, P, \quad (17)$$

де P – кількість малих кубів Δ_p , y_p – центр Δ_p , $|\Delta_p|$ – об'єм Δ_p . Ми припускаємо, що об'єднання Δ_p формує покриття всієї D , а діаметр Δ_p дорівнює $O(d^{1/2})$.

З обчислювального погляду, розв'язування системи (17) є простішим, ніж розв'язування системи (16), оскільки $P \ll M$.

Отже, ми маємо дві різні системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які відповідають формулі (15) і рівнянню (9). Розв'язуючи ці системи, можна порівнювати їхні розв'язки і оцінити межі застосовності асимптотичного підходу [10] розв'язування задачі розсіяння на сукупності малих включень.

Діаграма напрямленості включень

Маючи асимптотичний розв'язок задачі розсіяння і розв'язок граничного рівняння, ми можемо визначити акустичне поле всюди, зокрема і віддалену зону. Однак поряд із цими розв'язками можна використати певні спрощені вирази для поля і його діаграми напрямленості (ДН). Наприклад, для розсіяного поля можна використати таку формулу[13]:

$$p_s = -p_{inc} \sum_{m=0}^{\infty} A_m P_m(\cos \theta) h_m^{(1)}(kr), \quad (18)$$

в якій p_{inc} – сила тиску падаючої на сферу хвилі, P_m – поліном Лежандра m -го порядку, θ – кут розсіювання, $h_m^{(1)}(kr)$ – сферична функція Ганкеля першого роду, k – хвильове число навколишнього середовища, r – відстань від сфери до точки спостереження. Амплітудний коефіцієнт A_m дорівнює

$$A_m = \frac{(-i)^m (2m+1)}{1 + iC_m}. \quad (19)$$

Для включення радіусом a , заповненого газом густиною ρ_b (швидкість звукової хвилі c_b), яке міститься у рідині із густиною ρ_f і швидкість звуку у якій c_f , коефіцієнт C_m обчислюється так:

$$C_m = \frac{c_{11} - c_{12}}{c_{13}}, \quad (20)$$

$$c_{11} = \frac{mj_{m-1}(k_b a) - (m+1)j_{m+1}(k_b a) n_m(ka)}{mj_{m-1}(ka) - (m+1)j_{m+1}(ka) j_m(k_b a)}, \quad (21)$$

$$c_{12} = \frac{mn_{m-1}(ka) - (m+1)n_{m+1}(ka) p_b c_b}{mj_{m-1}(ka) - (m+1)j_{m+1}(ka) p_f c_f}, \quad (22)$$

$$c_{13} = \frac{mj_{m-1}(k_b a) - (m+1)j_{m+1}(k_b a) j_m(ka)}{mj_{m-1}(ka) - (m+1)j_{m+1}(ka) j_m(k_b a)} - \frac{p_b c_b}{p_f c_f}, \quad (23)$$

де $j_m(x)$ – сферична функція Бесселя, $n_m(x)$ – функція Неймана, k_b – хвильове число для матеріалу включення.

Для спрощення формули (18) у разі малого розміру включення ($ka \ll 1$) введемо комплексну функцію розсіяння

$$f_B |_{ka \ll a} = \frac{a}{(f_{res}/f)^2 - 1 - i\delta}, \quad (24)$$

де f_{res} і f – резонансна і робоча частоти відповідно. Використовуючи рівняння (18), комплексну функцію розсіяння перетворимо до вигляду

$$f_B(\theta, r) = -\frac{r}{e^{ikr}} \sum_{m=0}^1 A_m P_m(\cos \theta) h_m^{(1)}(kr), \quad (25)$$

або використовуючи тотожності $P_0(\cos \theta) = 1$ і $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$, запишемо її у формі

$$f_B(\theta, r) = -\frac{r}{e^{ikr}} [A_0 h_0^{(1)}(kr) + A_1 \cos \theta h_1^{(1)}(kr)], \quad (26)$$

що зручно під час проведення обчислень.

Числові експерименти для розрахунку зворотного розсіяння у разі двох включень проводились на прикладі розрахунку інтенсивності розсіяння [13]. Для окремого включення квадрат

амплітуди f_B , розрахований у напрямку зворотного розсіяння ($\theta=180^0$), визначає поперечний перетин зворотного розсіяння σ_{bs} , а інтенсивність розсіяння (TS) обчислюється як

$$TS = 10 \log \sigma_{bs} \quad (27)$$

(в dB/m^2). Для двох включень загальна інтенсивність розсіяння на приймачі p_T задається формулою

$$TS = 10 \log \left(\frac{|p_T|^2}{|p_{inc}|^2} R_{BR}^2 \right), \quad (28)$$

де p_{inc} – інтенсивність падаючої хвилі на включенні, R_{BR} – відстань від випромінювачів до вимірювального пристрою. Для більшої точності розрахунків інтенсивність p_{inc} має бути замінена на p_{S1} і p_{S2} – інтенсивності на першому і другому включенні, а віддаль RB повинна бути замінена віддальми відповідно R_{1R} і R_{2R} .

Результати числового моделювання

Числові розрахунки проводились для двох повітряних включень, які розміщались у водному середовищі. Розглядали такі робочі частоти: 140 МГц, 125 МГц, і 80 МГц, радіус включення $r=585\mu\text{m}$, швидкість звуку у воді $v=1490\text{m}/\text{sek}$. Хвильове число k для навколишнього середовища вираховувалось за формулою

$$k = 2\pi f / v. \quad (29)$$

Розраховану ДН в площині yOz на рис. 1 наведено для двох робочих частот $f=140\text{MHz}$ і $f=125\text{MHz}$ (суцільна і штрихова криві відповідно). Розрахунки проведено для таких значень віддалі $2d$ між включеннями: $2d=0.011\text{m}$ і $2d=0.031\text{m}$, з метою порівняння результатів з наведеними у [13]. Результати обох підходів відрізняються не більше ніж на 2 %.

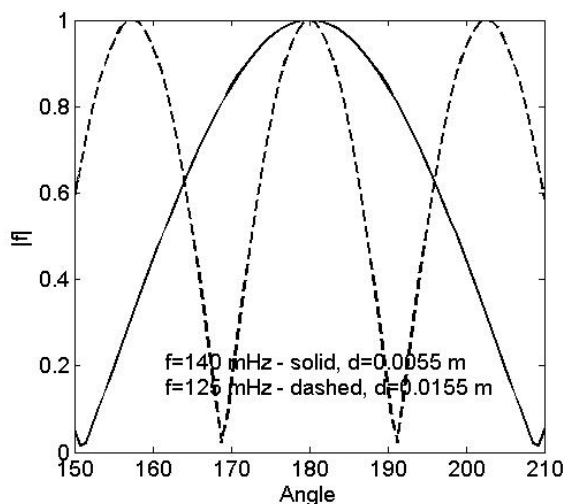


Рис. 1. ДН для двох робочих частот при $v=1490\text{m}/\text{sek}$

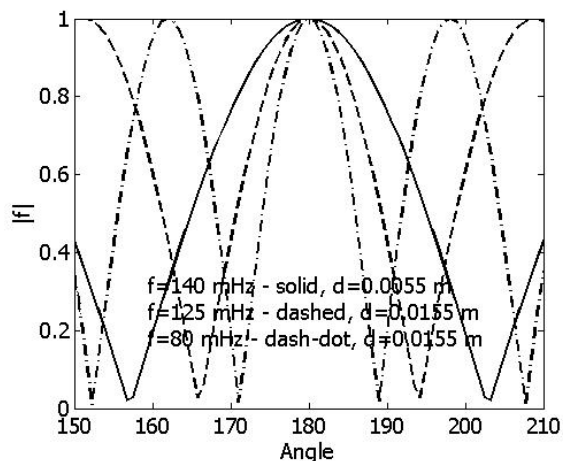


Рис. 2. ДН для трьох робочих частот при $v=1200\text{m}/\text{sek}$

Як показують результати числових розрахунків, ДН зворотного розсіяння залежить не тільки від робочої частоти f , але й від швидкості звукової хвилі у середовищі. Так для швидкості $v=1200\text{m}/\text{sek}$ отримані ДН значною мірою відрізняються від попереднього випадку. Зі зменшення швидкості v ширина пелюсток ДН зменшується.

Обчислення для порівняння результатів асимптотичної формули (16) і розв'язку за формулою (26) були проведені з використанням розв'язку відповідної системи лінійних рівнянь (17). Результати наведено на рис. 3. Тут показано залежність відхилення амплітуд розв'язків (16) і (26) від амплітуди “точного розв'язку”, який отриманий із (17), від нормалізованої відстані kz до осі включень в площині xOy . Компоненти полів (16) і (17) в площині yOz близькі до поля, розрахованого за формулою (26). Три верхні криві характеризують точність розв'язку за формулою (26), а три нижні криві характеризують точність розв'язку за формулою (16). Суцільні, штрихові і штрих-пунктирні криві відповідають частотам 140 МГц, 125 МГц, і 80 МГц. Наведені результати свідчать, що простий аналітичний розв'язок за формулою (26) можна успішно використовувати замість розв'язку (16), який вимагає значного обсягу обчислень, особливо для великих M .

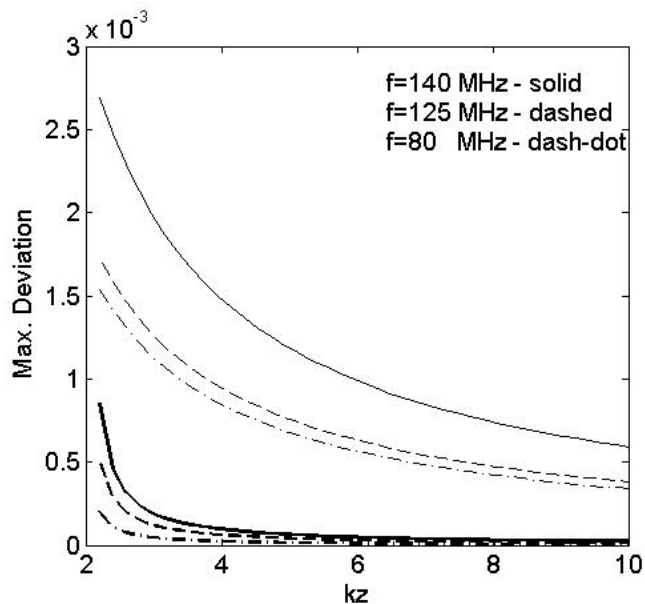


Рис. 3. Відносна точність розв'язків асимптотичної формули (16) і наближеної формули (26)

Асимптотичний підхід до розв'язування задачі розсіяння сукупністю малих включень вимагає низки числових розрахунків з метою тестування його застосування для практичних інженерних потреб. З практичного погляду важливими є такі числові експерименти:

- для не доволі великих M ($M=2, 5, 10, 25, 50$) визначити оптимальне співвідношення a і d , для яких придатна асимптотична формула (12);
- дослідити відносну похибку розв'язків граничного рівняння (9) і системи лінійних алгебраїчних рівнянь (17);
- для великих M ($M=10^5, M=10^6$) дослідити відносну різницю між розв'язками граничного рівняння (9) і системи лінійних алгебраїчних рівнянь (16);
- дослідити відносну різницю між розв'язками систем (16) і (17);
- використовуючи метод, запропонований у [10], дослідити, наскільки отриманий коефіцієнт відбиття $n_{M(x)}^2$ відрізняється від заданого $n^2(x)$ при зміні параметрів M , a та інших геометричних параметрів задачі.

Для числових розрахунків приймали $k=1$, $\kappa=0.9$, і $N(x)=N=\text{const}$. Для $k=1$ та a і d , для яких проводились числові експерименти, розмір включення дорівнював декільком довжинам хвиль, тому ефекти багатократного відбиття не є істотними. Отримані результати підтверджують ефективність запропонованого підходу для розв'язання низки важливих інженерно-практичних задач.

Висновки

Результати числового моделювання, які ґрунтуються на асимптотичному підході, для розв'язання задачі розсіяння акустичних хвиль на сукупності включень дають можливості визначити межі застосовності запропонованого підходу, а також підтверджують можливість його застосування для створення середовищ із заданим коефіцієнтом заломлення. Це своєю чергою дає можливість створювати середовища із заданою просторовою дисперсією, а також середовища із від'ємним заломленням.

1. T. K. Stanton, "Multiple scattering with application to fish-echo processing," *J. Acoust. Soc Am.*, vol. 73, pp. 1164–1169, 1983. 2. K. W. Kommander and A. Prosperetti, "Linear pressure waves in bubbly liquids: Comparison between theory and experiments," *J. Acoust. Soc Am.*, vol. 85, pp. 732–746, 1989. 3. K. K. Shung, R. A. Sigelman, and J. N. Reid, "Scattering of ultrasound by blood," *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. BME-23, pp. 460–467, 1995. 4. A. G. Ramm, *Wave scattering by Small Bodies of Arbitrary Shapes*. World Scientific, Singapore, 2005. 5. J. T. Seo, Q. Yang, S. Creekmore, B. Tabibi, D. Temple, S. Y. Kim, K. Yoo, A. Mott, M. Namkung, S. S. Jung, "Large pure refractive nonlinearity of nanostructure silica aerogel," *Applied Physics Letters*, vol. 82, pp. 4444–4446, June 2003. 6. E. Shonbrun, M. Tinker, Park Wounjhang, Jeong-Bong Lee, "Negative refraction in a Si-polymer photonic crystal membrane," *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 17, pp. 1196–1198, June 2005. 7. A. von Rhein, D. Pergande, S. Greulich-Weber, R. B. Wehrspohn, "Experimental verification of apparent negative refraction in low-epsilon material in the microwave regime," *Journal of Applied Physics*, vol. 101, No 8, pp. 086103–086103-3, April 2007. 8. T. M. Gregorczyk, C. D. Moss, Lu Jie, Chen Xudong, J. Pacheco (Jr.), Kong Jin Au, "Properties of left-handed metamaterials: negative refraction, and focusing," *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, vol. 53, pp. 2956–2967, September 2005. 9. R. C. Hansen, "Negative refraction without negative index," *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 56, pp. 402–404, February 2008. 10. A. G. Ramm, "Many Body Wave Scattering by Small Bodies and Applications," *J. Math. Phys.*, vol. 48, No 10, 2007, 103511. 11. A. G. Ramm, "Wave Scattering by Many Small Particles Embedded in a Medium," *Physics Letters A*, 372, 2008, pp. 3064-3070. 12. A. G. Ramm, "A Collocation Method for Solving Integral Equations," *Intern. Journ. of Comput. Sci. and Mathem.*, vol. 3, No 2, pp. 222–228, February 2009. 13. G. Kapodistrias, P. H. Dahl, "Effects of interaction between two bubble scatterers," *J. Acoust. Soc Am.*, vol. 107 (6), pp. 3006–3017, June 2000. 14. M. I. Andriychuk and A. G. Ramm, "Scattering by many small particles and creating materials with a desired refraction coefficient," *Int. J. Computing Science and Mathematics*. Vol. 3, № 1/2, pp. 102–121, January 2010.