УДК 517.95

Б.Й. Пташник, М.М. Симотюк
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3-б, 79060, м. Львів, Україна

ТЕОРЕМА ВКЛАДЕННЯ ДЛЯ ПРОСТОРІВ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

Нехай $f(z)\equiv f(z_1,\dots,z_p)$ – ціла функція в C^p, $\{\lambda_j(k), k=(k_1,\dots,k_p)\in Z^p\}$, $j=1,2$, – послідовності дійсних чисел такі, що

$$\lambda_1(k)=\begin{cases}|f(k)|, & \text{якщо } f(k)\neq 0,\\ 1, & \text{якщо } f(k)=0,\end{cases}\qquad \lambda_2(k)=\begin{cases}|f(k)|^{-1}, & \text{якщо } f(k)\neq 0,\\ 1, & \text{якщо } f(k)=0.\end{cases}$$

Позначимо через W_α^β $(\alpha,\beta\in R)$ і $W_j(f)$, $j=1,2$, простори, отримані поповненням множини скінченних тригонометричних поліномів $\varphi(x)=\sum\varphi_k\exp(ik,x)$, $x=(x_1,\dots,x_p)$, за нормами

$$\|\varphi;W_\alpha^\beta\|=\sqrt{\sum_{k\in Z^p}|\varphi_k|^2\exp(2\alpha|k|^\beta)},\ \|\varphi;W_j(f)\|=\sqrt{\sum_{k\in Z^p}|\varphi_k|^2|\lambda_j(k)|^2},\ |k|=|k_1|+\dots+|k_p|,$$

відповідно. Такі простори виникають у багатьох крайових задачах для рівнянь із частинними похідними нескінченного порядку (див. [1, 2]). Представляє інтерес описати клас тих цілих функцій $f(z)$, для яких при певних α,β виконуються вкладення $W_1(f)\subset W_\alpha^\beta$, $W_\alpha^\beta\subset W_2(f)$.

Теорема. *Нехай* $a_1(t,k),\dots,a_n(t,k)$, $k\in Z^p$, *– такі неперервні за* t *на* $[0,T]$ *функції, що для деякого* $\beta\geq 1$

$$A=\sup_{k\in Z^p}(1+|k|)^{-\beta}\sqrt{1+\sum_{j=1}^n\max_{t\in[0,T]}|a_j(t,k)|^2}<\infty,$$

а $\{g(t,z), t\in[0,T]\}$ *– така сім'я цілих функцій, що для всіх* $k\in Z^p$

$$\frac{\partial^n g(t,k)}{\partial t^n}+a_1(t,k)\frac{\partial^{n-1}g(t,k)}{\partial t^{n-1}}+\dots+a_n(t,k)g(t,k)=0,$$

$$\max_{1\leq j\leq n}\left|\frac{\partial^{j-1}g(t,k)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=0}\geq C_1\exp(\delta|k|^\beta),\quad \sum_{j=1}^n\max_{t\in[0,t]}\left|\frac{\partial^j g(t,k)}{\partial t^j}\right|\leq C_2\exp(MT|k|^\beta),\quad \delta\in R,\ \ M\geq 0,$$

де додатні сталі C_1,C_2 *не залежать від* k. *Тоді для майже всіх (щодо міри Лебега в* R*) чисел* $t\in[0,T]$ *справджуються вкладення* $W_1(g(t,\cdot))\subset W_\alpha^\beta$, $W_{-\alpha}^\beta\subset W_2(g(t,\cdot))$, *якщо* $\alpha<\alpha_0$, *де*

$$\alpha_0=n(\delta-AT)-(n-1)MT.$$

Отримані результати застосовано до дослідження розв'язності двоточкових крайових задач для рівнянь із частинними похідними нескінченного порядку на торі.

Дослідження підтримані ДФФД України (проект № 28.1/010).

1. *Дубинский Ю.А. Алгебра псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами и ее приложения к математической физике // Успехи мат. наук., 1982.-* ***37****, вып. 5. – С. 97–137.*
2. *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 415 с.*