ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.740 № 740, (2012) с. 38–40

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.740 No 740, (2012) 38–40

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ПАРНО-ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНИХ ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ У ПРЯМОКУТНИКУ

О.В. Лопотко

Національний лісотехнічний університет України
вул. Генерала Чупринки 103, 79057, Львів, Україна

(Отримано 6 грудня 2011 р.)

Одержано інтегральне зображення додатно визначених функцій двох змінних, для яких ядро $K\,(x;y) == \frac{1}{2}[k(x_1-y_1,x_2-y_2)+k(x_1+y_1,x_2-y_2)]$ додатно визначено, де $k\,(x_1,x_2)$ $(x_1\in(-2l_1;2l_1),\ x_2\in(-2l_2;2l_2))$ – парне по кожній змінній, якщо фіксована друга, функція.

Ключові слова: інтегральне зображення, додатно визначені функції.

2000 MSC: 34860

УДК: 517.9

У праці [1] вказано метод побудови інтегральних зображень для додатно визначених ядер, зокрема у ній розглядались ядра $K\,(x;y)=\frac{1}{2}[k(x_1-y_1,x_2-y_2)+$ $+k(x_1+y_1,x_2-y_2)]$, де $k(x_1,x_2)\left(x_1,x_2\in R^1\right)$ парна по кожній змінній, якщо фіксована друга, функція. Ці ядра також вивчали у [4–9]. У цій статті, використовуючи методику [2] для звичайних додатно визначених функцій, одержано опис всіх продовжень цих функцій з прямокутника $2L=(-2l_1,2l_1)\times(-2l_2,2l_2)$ $(0<<l_1,l_2<\infty)$ на всю площину $R^1\times R^1$.

Означення. Парну по кожній змінній, якщо фіксована друга, функцію $k(x) == k\,(x_1,x_2)\in C(2L)$ називатимемо парно-додатно визначеною, якщо для довільної $u(x)=u(x_1,x_2)\in C_0^\infty(2L)$ виконується нерівність

$$\int\limits_L\int\limits_L K\,(x;y)\;\overline{u\,(x)}\,u\,(y)\;dxdy\geq 0.$$

Теорема. *Нехай парно-додатно визначена функція $k(x)=k(x_1,x_2)\in C(2L)$ і має таку властивість, що парно-додатно визначена функція однієї змінної $k(x_1,0)$ продовжується однозначно з інтервала $(-2l_1,2l_1)$ на всю вісь. Тоді і функція $k(x)$ продовжується (взагалі кажучи, неоднозначно) з прямокутника $2L$ у парну додатно визначену функцію на всю площину $R^1\times R^1$. Отже, для $x\in 2L$ функція $k(x)$ допускає зображення*

$$k\,(x)=\int\limits_{\Pi^+}\cos\sqrt{\lambda_1}x_1\cos\sqrt{\lambda_2}x_2d\rho(\lambda_1,\lambda_2),\qquad(1)$$

де $d\rho\,(\lambda_1,\lambda_2)$ – невід'ємна скінченна міра, яка визначається, взагалі кажучи, неоднозначно, а $\Pi^+=\{(\lambda_1,\lambda_2)\,|\lambda_1\in R^1,\lambda_2\geq 0\}$.

$\square$ *Доведення.* Введемо за допомогою парно-додатно визначеної функції $k(x) == k(x_1,x_2)\in C(2L)$ $(l=(-l_1,l_1)\times(-l_2,l_2))$ квазіскалярний добуток

$$\langle u,v\rangle=\int\limits_{-l_1}^{l_1}\int\limits_{-l_1}^{l_1}\int\limits_{-l_2}^{l_2}\int\limits_{-l_2}^{l_2}\frac{1}{2}[k(x_1-y_1,x_2-y_2)+k(x_1+y_1,x_2-y_2)]\overline{u(x_1,x_2)}v(x_1,x_2)dx_1dy_1dx_2dy_2,$$

$$u,v\in L_2(-l_1,l_1)\times L_2(-l_2,l_2,p(x_2)dx_2).$$

Після проведення факторизації й поповнення, одержимо гільбертовий простір H_k. Доведемо існування комутуючих самоспряжених розширень у просторі H_k ермітових операторів

$$C_1u=-\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}\quad(u\in C_0^\infty(-l_1,l_1)\otimes L_2(-l_2,l_2,p(x_2)dx_2)),$$

$$C_2u=-\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}\quad(u\in L_2(-l_1,l_1)\otimes C_0^\infty(-l_2,l_2)).$$

Для цього звузимо C_1 на $C_0^\infty(-l_1,l_1)\otimes\omega_2=\Im(B_1)\otimes\omega_2$, де $B_1=-\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}$ і покажемо, що при будь-якому $\omega_2\in L_2(-l_2,l_2)$ замикання цього звуження буде самоспряжене у просторі $H_{k;\omega_2}$ – поповнення $L_2((-l_1,l_1),p(x_1)dx_1)$ відносно квазіскалярного добутку

$$\langle u_1, v_1\rangle = \langle u_1\otimes\omega_2, v_1\otimes\omega_2\rangle_{H_k} =$$
$$= \int\limits_{-l_1}^{l_1}\int\limits_{-l_1}^{l_1}\int\limits_{-l_2}^{l_2}\int\limits_{-l_2}^{l_2}\frac{1}{2}[k(x_1-y_1,x_2-y_2)+k(x_1+y_1,x_2-y_2)]\overline{\omega_2(x_2)}\omega_2(y_2)u_1(x_1)v_1(y_1)dx_1dy_1dx_2dy_2.$$

Для цього введемо допоміжну функцію

$$f(t_2)=\int\limits_{-l_1}^{l_1}\int\limits_{-l_1}^{l_1}\frac{1}{2}[k(x_1-y_1,t_2)+k(x_1+y_1,t_2)]u_1(y_1)\overline{u_1(x_1)}dx_1dy_1 \in C(-2l_1;2l_1).$$

Зрозуміло, що ця функція додатно визначена, тому $|f(t_2)| \le f(0)$ для $t_2 \in \in(-2l_2;2l_2)$. Звідси випливає, що

$$\langle u_1, u_1\rangle_{\omega_2} = \int\limits_{-l_2}^{l_2}\int\limits_{-l_2}^{l_2} f(x_2-y_2)\omega_2(y_2)\overline{\omega_2(x_2)}dx_2dy_2 \le C_{\omega_2}f(0) =$$
$$= C_{\omega_2}\int\limits_{-l_1}^{l_1}\int\limits_{-l_1}^{l_1}\frac{1}{2}[k(x_1-y_1,0)+k(x_1+y_1,0)]u_1(y_1)\overline{u_1(x_1)}dx_1dy_1.$$

Тому, якщо множина функцій $-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - zu$ ($Im\, z \ne 0$, $u \in C_0^\infty(-2l_1;2l_1)$) щільна у просторі $H_{\frac{1}{2}[k(x_1-y_1,0)+k(x_1+y_1,0)]}$, то вона, тим більше, буде щільна у просторі H_{k,ω_2}. Але перша щільність є за припущенням, тому має місце і друга щільність, тобто замикання звуження C_1 самоспряжене.

Тому, згідно з теоремою 2.6 [1, гл. VIII] існує самоспряжене розширення оператора C_2 комутуючи з замиканням C_1.

Тепер можна, використовуючи теорему 4.2 [1, гл. VIII], одержати зображення, враховуючи парність ядра по кожній змінній та специфіку елементарного ядра

$$k(x_1,x_2) = \int\limits_{R^2}\cos\sqrt{\lambda_1}x_1\cos\sqrt{\lambda_2}x_2 d\rho(\lambda_1,\lambda_2), \qquad (2)$$

де $d\rho(\lambda_1,\lambda_2)$ – невід'ємна скінченна міра, яка визначається, взагалі кажучи, неоднозначно. Потім, оскільки оператор $C_2 \ge 0$, то міра у зображенні (2) зосереджена на Π^+, тобто має зображення (1). Теорему доведено. ■

Висновки

Ця теорема дає змогу розширити клас додатно визначених ядер, що були досліджені раніше. Можна розглядати такі ядра для функцій багатьох змінних. Ці ядра можна використовувати для побудови моделей задач математичної фізики.

Література

[1] *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наукова думка, 1965. – 800 с.

[2] *Березанский Ю.М., Горбачук М.Л.* О продолжении положительно определенных операторных функций двух переменных // Укр. мат. журн. – 1965. – 17, №5. – С.96–99.

[3] *Горбачук М.Л.* О представлении положительно определенных операторных функций // Укр. мат. журн. – 1965. – 17, №2. – С.22–46.

[4] *Devinatz A.* Integral representations of positive definite functions // Trans. Amer. Math. Sos. – 1954. – 77, №3. – P.455–480.

[5] *Костюченко А.Г., Митягин Б.С.* О представлении положительно определенных функционалов на ядерных пространствах // Докл. АН СССР. – 1960. – 131, №2. – С. 13–16.

[6] *Костюченко А.Г., Митягин Б.С.* Положительно определенные функционалы на ядерных пространствах // Тр. Моск. мат. о-ва – 1960. – 9. – С.283–316.

[7] *Левин Б.Я., Овчаренко И.Е.* Описание продолжений эрмитово-положительных функций // Докл. АН СССР. – 1960. – 159, №4. – С.746–749.

[8] *Левитан Б.М.* Применение операторов обобщенного сдвига к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка // Успехи мат. наук. – 1949. – 4, №1. – P.3–119.

[9] *Чаус Н.Н.* О классах единственности решений задачи Коши и представлениях положительно определенных ядер // Докл. АН СССР. – 1965. – 163, №1. – С.36–39.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧЁТНО-ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЁННЫХ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

О.В. Лопотко

Национальный университет "Львівська політехніка",
ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина

Получено интегральное представление положительно определённых функций двух переменных, для которых ядро $K(x;y) = = \frac{1}{2}[k(x_1-y_1,x_2-y_2)+k(x_1+y_1,x_2-y_2)]$ положительно определено, где $k(x_1,x_2)$ $(x_1 \in (-2l_1;2l_1),\ x_2 \in (-2l_2;2l_2))$ – чётная по каждой переменной, если фиксирована одна из них, функция.

Ключевые слова: интегральное представление, положительно определённые функции.

2000 MSC: 34860

УДК: 517.9

THE INTEGRAL REPRESENTATION OF EVEN POSITIVE DEFINITE FUNCTIONS SET BEFORE RECTANGLE

O.V. Lopotko

National Univesity Forest of Lviv
103 General Tchuprunka Str., Lviv, 79057, Ukraine

We obtain the summary integral representation positive function of two variable such that the kernel $K(x;y) = = \frac{1}{2}[k(x_1-y_1,x_2-y_2)+k(x_1+y_1,x_2-y_2)]$ is positively defined, where $k(x_1,x_2)$ $(x_1 \in (-2l_1;2l_1),\ x_2 \in (-2l_2;2l_2))$ even function.

Key words: integral representation, positive defined function.

2000 MSC: 34860

УДК: 517.9