УДК 519.222:528.11

Б. Пряха, Р. Білецький, Я. Федьорко
Київський національний університет будівництва і архітектури

ОСОБЛИВОСТІ ВИБІРКОВИХ ДИСПЕРСІЙ

Обґрунтовано три теореми теорії точності вимірювань

Three theorems of the theory accuracy measurements are substantiated

Постановка проблеми. Вибіркові дисперсії широко застосовують під час оцінювання стану навколишнього середовища.

Будь-який термін або величина в теорії точності вимірювань може мати тільки одне означення – явне або неявне.

Упродовж тривалого часу теорія точності вимірювань ґрунтувалась на неявних означеннях вибіркових дисперсій s^2, S^2. Сьогодні теорія має явні означення цих дисперсій [1]. Отже, неявні означення дисперсій потребують доведення.

Незважаючи на великий обсяг виконаних досліджень, вивчення особливостей характеристик випадкових величин залишається актуальним.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У [2] розглянута концепція невизначеності вимірювань, що запроваджена документом [3] Міжнародного комітету зі стандартизації (ISO), який рекомендує приписувати шуканим величинам стандартну невизначеність. У концепції невизначеності порівняно з концепцією похибок відходять від поняття “істинного значення вимірюваної величини”, а сприймають її як “нерозпізнану”, а тому термін похибок втрачає своє смислове значення [2].

Невизначеності вимірювань визначаються за вибірковою дисперсією S^2. Так, в сукупності результатів вимірювань обсягу k стандартну невизначеність типу *A* вимірювань обчислюють за формулою [4]: $u(x) = \frac{S}{\sqrt{k}}$, де $x = \bar{x}$ і називається вхідною величиною; $\bar{x}$ – це вибіркове середнє значення; величина $S = \sqrt{S^2}$.

Вибіркові дисперсії знаходять застосування при загальній оцінці точності результатів геодезичних вимірювань [5].

Мета статті. Обґрунтувати теореми теорії точності вимірювань.

Виклад основного матеріалу досліджень. Вибіркові дисперсії є характеристики розсіювання вибіркового розподілу [6], мають явні означення [1]:

$$s^2 \equiv \frac{\overline{d'^2}}{2} = \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} (x_j - x_i)^2; \tag{1}$$

$$S^2 \equiv \frac{\overline{d^2}}{2} = \frac{1}{k(k-1)} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} (x_j - x_i)^2 , \tag{2}$$

де $\overline{d'^2}$, $\overline{d^2}$ – це відповідно квадрат середньоквадратичної різниці значень елементів декартового квадрата вибірки і квадрат середньоквадратичної різниці значень вибірки; k – обсяг вибірки; x_j, x_i – значення двох елементів вибірки. Величина $s = \sqrt{s^2}$ називається вибірковим стандартним відхиленням.

Т е о р е м а 1. *Вибіркова дисперсія* s^2 *– це різниця середнього значення* $\overline{x^2}$ *квадратів елементів вибірки і квадрата* $\bar{x}^2$ *вибіркового середнього*

$$s^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 . \tag{3}$$

Д о в е д е н н я. Виконаємо перетворення означення (1)

$$s^2 = \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} (x_j - x_i)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} \left(x_i^2 + x_j^2\right) - 2\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} x_i x_j}{k^2} . \tag{4}$$

У цьому рівнянні

$$\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} (x_i^2 + x_j^2) = \left(x_1^2 + x_2^2\right) + \left(x_1^2 + x_3^2\right) + \ldots + \left(x_1^2 + x_k^2\right) +$$
$$+ \left(x_2^2 + x_3^2\right) + \left(x_2^2 + x_4^2\right) + \ldots + \left(x_2^2 + x_k^2\right) + \ldots + \left(x_{k-1}^2 + x_k^2\right) = (k-1) \sum_{i=1}^{k} x_i^2 . \tag{5}$$

Знайдемо квадрат суми значень вибірки

$$\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2 = (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)\ (x_1 + x_2 + \ldots + x_k) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k} x_i x_j .$$

Отже,

$$2\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k} x_i x_j = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{k} x_i^2$$

З урахуванням цього рівняння та рівності (5), рівняння (4) набуває такого вигляду:

$$s^2 = \frac{(k-1)\sum_{i=1}^{k} x_i^2}{k^2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2}{k^2} + \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}{k^2} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}{k} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k}\right)^2 . \tag{6}$$

Оскільки в рівнянні (6)

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}{k} = \overline{x^2} ; \quad \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k}\right)^2 = \bar{x}^2 , \tag{7}$$

тому воно зводиться до відповідності (3).

Теорему доведено.

Т е о р е м а 2. *Вибіркові дисперсії* s^2, S^2 *мають такий вигляд:*

$$s^2 = \overline{(x-\bar{x})^2} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2; \quad (8)$$

$$S^2 = \frac{k}{k-1}s^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2. \quad (9)$$

Д о в е д е н н я. Виконаємо перетворення рівняння (3)

$$s^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \overline{x^2} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}x_i^2}{k} - \frac{2\bar{x}\sum_{i=1}^{k}x_i}{k} + \bar{x}^2 =$$

$$= \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k}x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{k}x_i + k\bar{x}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{k}\left[\left(x_1^2 - 2x_1\bar{x} + \bar{x}^2\right) + \left(x_2^2 - 2x_2\bar{x} + \bar{x}^2\right) + \ldots + \left(x_k^2 - 2x_k\bar{x} + \bar{x}^2\right)\right] = = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2 = \overline{(x-\bar{x})^2}.$$

З означень (1), (2) випливає така відповідність: $S^2 = \frac{k}{k-1}s^2$.

Отже,

$$S^2 = \frac{k}{k-1}\left[\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2\right] = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2.$$

Теорему доведено.

Т е о р е м а 3 [7]. *Вибіркова дисперсія* S^2 *– це різниця середнього значення* $\overline{x^2}$ *квадратів елементів вибірки і середнього значення* $\overline{x_i x_j}$ *добутку двох її елементів*

$$S^2 = \overline{x^2} - \overline{x_i x_j}. \quad (10)$$

Д о в е д е н н я. Використавши вирази (5), (7), перетворимо рівняння (4)

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k}(x_j^2 + x_i^2) - 2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k}x_j x_i}{k(k-1)} = \frac{(k-1)\sum_{i=1}^{k}x_i^2}{k(k-1)} - \frac{2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k}x_j x_i}{k(k-1)} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{k}x_i^2}{k} - \frac{2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k}x_j x_i}{k(k-1)} = \overline{x^2} - \frac{2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k}x_j x_i}{k(k-1)}. \quad (11)$$

Кількість добутків $x_j x_i$ дорівнює кількості комбінацій з k елементів по два: $n = C_k^2 = \frac{1}{2}k(k-1)$, тому в формулі (11)

$$\frac{2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k}x_j x_i}{k(k-1)} = \frac{\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k}x_j x_i}{n} = \overline{x_i x_j}.$$

Використавши це рівняння, від рівняння (11) приходимо до правила (10).

Теорему доведено.

З рівнянь (3), (10) виходить, що вибіркові дисперсії s^2, S^2 є різниці середнього значення $\overline{x^2}$ і відповідно величин $\bar{x}^2, \overline{x_i x_j}$. Така залежність дисперсій дає можливість визначити різницю R їх значень

$$R = S^2 - s^2 = \left(\overline{x^2} - \overline{x_i x_j}\right) - \left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right) = \bar{x}^2 - \overline{x_i x_j}. \quad (12)$$

Для повного обґрунтування отриманих наукових результатів наведемо приклад.

П р и к л а д. В [1] наведено варіаційний ряд результатів вимірювань (мм) обсягу $k = 4$

$X = x_1, x_2, x_3, x_4 = 2, 4, 5, 5,$

що має вибіркове середнє значення $\bar{x} = 4$ мм. За правилами (8), (9) одержані такі характеристики розсіювання значень вибірки (мм^2):

$s^2 = 1{,}5;\ S^2 = 2.$

Визначимо ці ж дисперсії та їх різницю за формулами (3), (10), (12).

У вибірці визначається

$$n = \frac{1}{2}k(k-1) = \frac{(4)(4-1)}{2} = \frac{(4)(3)}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

добутків $x_i x_j$ двох елементів вибірки (мм^2):

$x_1 x_2 = (2)(4) = 8;\ x_1 x_3 = (2)(5) = 10;\ x_1 x_4 = (2)(5) = 10;$

$x_2 x_3 = (4)(5) = 20;\ x_2 x_4 = (4)(5) = 20;\ x_3 x_4 = (5)(5) = 25.$

Обчислимо середнє значення добутку двох елементів вибірки (мм^2)

$$\overline{x_i x_j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k} x_i x_j = \frac{1}{n}\left(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4\right) =$$

$$= \frac{1}{6}(8+10+10+20+20+25) = \frac{93}{6} = \frac{31}{2}.$$

За формулою (12) обчислимо різницю значень дисперсій (мм^2)

$$R = S^2 - s^2 = \bar{x}^2 - \overline{x_i x_j} = 4^2 - \frac{31}{2} = 16 - \frac{31}{2} = \frac{32-31}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Знайдемо середнє значення квадратів елементів вибірки

$$\overline{x^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}{k} = \frac{2^2 + 4^2 + 5^2 + 5^2}{4} = \frac{4+16+25+25}{4} = \frac{70}{4} = \frac{35}{2}.$$

Визначимо дисперсії (мм^2)

$$s^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{35}{2} - 4^2 = \frac{35}{2} - 16 = \frac{35-(2)(16)}{2} = \frac{35-32}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

$$S^2 = \overline{x^2} - \overline{x_i x_j} = \frac{35}{2} - \frac{31}{2} = \frac{35-31}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

К о н т р о л ь: $R = S^2 - s^2 = 2 - 1{,}5 = 0{,}5$ мм^2.

Висновки

1. Під час доведення теорем теорії точності вимірювань були використані явні означення дисперсій.

2. За формулою різниці вибіркових дисперсій

$$R = S^2 - s^2 = \overline{x}^2 - \overline{x_i x_j}$$

можна здійснювати контроль обчислень.

3. Наведені теореми – це числові дійсні функції, визначені на множині кількох функцій. Тому вони є функціонали. Формули (1), (2) – це також функціонали, але визначені вони на множині, що складається з однієї функції. Цією функцією є правило $d_{ji} = (x_j - x_i)$ визначення різниць результатів вимірювань.

Перспективи подальших досліджень у цьому напрямку полягають в обґрунтуванні інших особливостей характеристик випадкових величин.

1. Пряха Б. Явні означення вибіркових дисперсій // Геодезія, картографія та аерофотознімання. – Львів. – 2007. 2. Войтенко С. Використання концепції невизначеності при обробці результатів геодезичних вимірів // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва: Зб. наук. пр. – Львів, 2005. – С. 88–90. 3. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. ISO International Organization for Standartization, Geneva, 1993. 4. Володарский Е.Т., Харченко И.А. Неопределенность измерений и достоверность контрольных испытаний // Вісник Інженерної академії України. – 2005. – №1. – С.83–89. 5. Пряха Б.Г. Загальна оцінка точності геодезичних вимірів // Інженерна геодезія: Науково-техн. збірн. – Вип.52 / Відп. ред. С.П. Войтенко. – К.: КНУБА, 2006. – С. 145–153. 6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1968. – 720 с. 7. Білецький Р.Я., Федьорко Я.О. Особливість вибіркової дисперсії // Наукова конф. молодих вчених, аспірантів і студентів КНУБА: Тези доп. – К.: КНУБА, 2007. – С. 160.