

## МОДЕЛЮВАННЯ МЕХАНІЧНОГО ГАСНИКА КОЛИВАНЬ У СИСТЕМІ MATHCAD

© Ігнатишин М.І., Холод П.Ф., 2013

Побудовано та досліджено модель механіки деформівного твердого тіла, що описує динаміку поведінки механічних гасників коливань. Проведено порівняльний аналіз гасників коливань різних конструкцій. Результати роботи корисні з огляду на оптимізацію конструктивних параметрів гасників механічних коливань для ефективнішого гасіння зовнішніх збурювальних впливів.

**Ключові слова:** механічний гасник, коливання, модель.

**In this paper we developed and studied a model of the solid body that described dynamic behavior of mechanical vibrations quenchers. A comparative analysis of the quenchers of vibrations of various structures. The results are useful in terms of optimization of design parameters quenchers mechanical vibrations for a more efficient quenching of external disturbing effects.**

**Key words:** mechanical quenchers, vibrations, model.

**Постановка проблеми.** Механічні гасники коливань широко застосовуються у техніці. Вони призначені для гасіння коливань механізмів, машин, будівельних споруд тощо. Причиною виникнення небажаних коливань можуть бути техногенні та природні чинники, наприклад, землетрус.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Досліджуваний механічний гасник коливань належать до двомасових механічних систем. Такі системи активно досліджуються з метою їх оптимізації. В [1] В.А. Баженова, О.С. Погорелова, Т.Г. Постнікова розвинули метод продовження за параметром для віброударних систем під час моделювання удару силою контактної взаємодії теоретичні викладки, розроблені для двохмасових систем з двома ступенями свободи, відмічаються переваги цього методу, які уможливають істотно зменшити обчислювальні витрати. Ф.М. Судак, І.Ф. Вороніна, Д.П. Алтухов [2] провели дослідження з метою зменшення шуму двигунів внутрішнього згоряння за допомогою механічних демпферних пристроїв, вони розробили конструкцію одного із можливих варіантів такого пристрою. В.П. Легеза, Д.В. Легеза, С.В. Гузенко розглянули маятниковий гасник типу “гантеля” [3, 4] і запропонували регулювання власної частоти маятнікового гасника виконувати за допомогою оптимального вибору конструктивних розмірів.

Отже, актуальним є дослідження та аналіз відомих конструкцій гасників механічних коливань, отримання співвідношень, що пов’язують динаміку лінійних та нелінійних коливань [5–8] гасника з його конструктивними і механічними характеристиками, подальше формулювання оптимізаційних задач на основі отриманих математичних формул, вдосконалення відомих та синтез нових механічних гасників для зменшення шкідливих наслідків техногенних та природних катастроф, пов’язаних з механічним руйнуванням механізмів, машин та споруд. Методи розв’язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла застосовують у своїх дослідженнях Е.Е. Левина, А.И. Маневич (дослідження вимушених коливань циліндричного гасника коливань), А.А. Клименко, Ю.В. Милин (нелінійні коливання маятнікових гасників коливань).

**Мета роботи** – побудувати математичну модель циліндричного гасника механічних коливань, розв’язати отримані диференціальні рівняння методом Рунге-Кутта з застосуванням

системи MATHCAD та підвищити ефект гасіння коливань зміною форми і вибору розмірів конструкції гасника.

**Об'єкт та методи дослідження.** Об'єктом дослідження є механічна система двох тіл, що взаємодіють між собою через силу тиску та тертя і одне з тіл зазнає періодичного збурення заданої частоти та амплітуди через пружну ланку та знаходиться під дією дисипативної сили пропорційної до швидкості. У дослідженнях застосовані методи механіки деформівного твердого тіла. Методи дослідження передбачають застосування механіки Лагранжа для побудови математичної моделі об'єкта дослідження. Предметом дослідження є математична модель механіки деформівного твердого тіла згаданої системи. Для розв'язку відповідних диференціальних рівнянь моделі застосовано числовий метод Рунге-Кутта.

**Постановка задачі.** Розглянемо двомасову механічну систему, що складається з масивного тіла  $M$ , яке закріплене горизонтальною пружною жорсткістю  $k$  з горизонтально коливальною основою, та тіла гасника масою  $m$  (рис. 1). Кінетична енергія системи двох тіл гасника механічних коливань складається з кінетичної енергії поступального руху тіла механізму (споруди) та кінетичної енергії поступального і обертального руху тіла гасника:

$$T = T_1 + T_2 = M \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2} \left( \dot{x}^2 + 2\dot{x}(R-r_0)\dot{\theta} \cos \theta + (R-r_0)^2 \dot{\theta}^2 \right) + \frac{J}{2} \left( \frac{R-r_0}{r_0} \right)^2 \dot{\theta}^2, \quad (1)$$

де  $T_1$  та  $T_2$  – кінетична енергія поступального та обертального руху циліндра відповідно (рис. 1, 2).

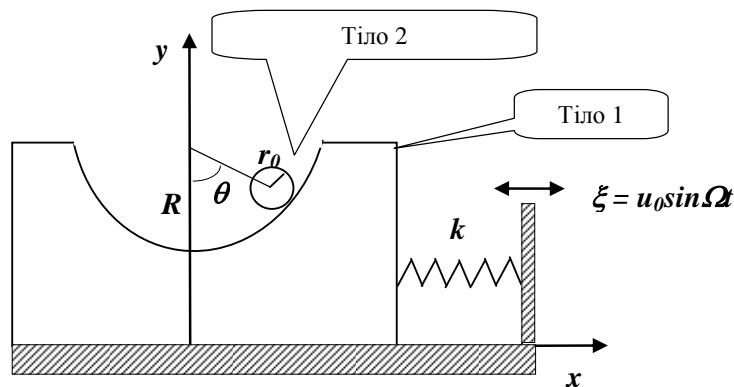


Рис. 1. Тіло 2 має форму циліндра

Потенціальна енергія складається з потенціальної енергії пружини та потенціальної енергії сили тяжіння, що діє на тіло:

$$\Pi = k \frac{(\xi - x)^2}{2} - mg(R - r_0) \cos \theta. \quad (2)$$

Отже, лагранжіан системи буде:

$$L = T - \Pi = M \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{m}{2} \left( \dot{x}^2 + 2\dot{x}(R-r_0)\dot{\theta} \cos \theta + (R-r_0)^2 \dot{\theta}^2 \right) + \frac{J}{2} \left( \frac{R-r_0}{r_0} \right)^2 \dot{\theta}^2 - k \frac{(\xi - x)^2}{2} + mg(R - r_0) \cos \theta. \quad (3)$$

**Основна частина.** Для побудови рівнянь Лагранжа отримаємо похідні:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = k(u_0 \sin(\Omega t) - x); \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M + m)\dot{x} + m(R - r_0) \cos \theta \cdot \dot{\theta}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m(R - r_0) \sin \theta (\dot{x} \dot{\theta} + g); \quad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\dot{x}(R-r_0)\cos\theta + m(R-r_0)^2\dot{\theta} + J\left(\frac{R-r_0}{r_0}\right)^2\dot{\theta}; \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} + m(R-r_0)(-\sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 + \cos\theta \cdot \ddot{\theta}); \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m(R-r_0)(\ddot{x}\cos\theta - \dot{x}\sin\theta \cdot \dot{\theta}) + m(R-r_0)^2\ddot{\theta} + J\left(\frac{R-r_0}{r_0}\right)^2\ddot{\theta}. \quad (9)$$

Підставимо співвідношення (4)–(9) в рівняння Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (10)$$

де  $i = 1, 2$  та  $q_1 = x(t)$ ,  $q_2 = \theta(t)$ .

З врахуванням дисипативної сили, сили в'язкого тертя  $\beta\dot{x}$  матимемо рівняння Лагранжа, що описують рух системи:

$$\begin{cases} \left(\frac{M}{+m}\right)\ddot{x} + m\left(\frac{R}{-r_0}\right)\cos\theta \cdot \ddot{\theta} + \beta\dot{x} - m\left(\frac{R}{-r_0}\right)\sin\theta \cdot \dot{\theta}^2 + kx = ku_0 \sin(\Omega t); \\ \cos\theta \ddot{x} + \left(1 + \frac{J}{mr_0^2}\right)(R-r_0)\ddot{\theta} + g \sin\theta = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Розв'яжемо систему диференціальних рівнянь (11) стосовно других похідних  $\ddot{x}$  та  $\ddot{\theta}$ :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = \frac{\left(mr_0^2 + J\right)\left[-\beta\dot{x}(t) + m(R-r_0)\sin(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}^2(t) - kx(t) + ku_0 \sin(\Omega t)\right] + \cos(\theta(t))r_0^2 m^2 g \sin(\theta(t))}{Mmr_0^2 + MJ + m^2 r_0^2 + mJ - m^2 r_0^2 \cos^2(\theta(t))}; \\ \ddot{\theta}(t) = \frac{\cos(\theta(t))mr_0^2\left[-\beta\dot{x}(t) + m(R-r_0)\sin(\theta(t))\dot{\theta}^2(t) - kx(t) + ku_0 \sin(\Omega t)\right] + \left(\frac{M}{+m}\right)mr_0^2 g \sin(\theta(t))}{(R-r_0)\left(Mmr_0^2 + MJ + m^2 r_0^2 + mJ - m^2 r_0^2 \cos^2(\theta(t))\right)}. \end{cases} \quad (12)$$

Систему двох диференціальних рівнянь другого порядку (12) зведемо до системи чотирьох рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} x_1(t) = \dot{x}(t) \\ \theta_1(t) = \dot{\theta}(t) \\ \dot{x}_1(t) = \frac{\left(mr_0^2 + J\right)\left[-\beta x_1(t) + m(R-r_0)\sin(\theta(t)) \cdot \theta_1^2(t) - kx(t) + ku_0 \sin(\Omega t)\right] + \cos(\theta(t))r_0^2 m^2 g \sin(\theta(t))}{Mmr_0^2 + MJ + m^2 r_0^2 + mJ - m^2 r_0^2 \cos^2(\theta(t))}; \\ \dot{\theta}_1(t) = \frac{\cos(\theta(t))mr_0^2\left[-\beta x_1(t) + m(R-r_0)\sin(\theta(t))\theta_1^2(t) - kx(t) + ku_0 \sin(\Omega t)\right] + \left(\frac{M}{+m}\right)mr_0^2 g \sin(\theta(t))}{(R-r_0)\left(Mmr_0^2 + MJ + m^2 r_0^2 + mJ - m^2 r_0^2 \cos^2(\theta(t))\right)}. \end{cases} \quad (13)$$

Вихідні дані для числового моделювання гасника механічних коливань:

$M = 20$  кг – маса тіла 1 динамічної системи (рис. 1);

$m = 0,5$  кг – маса тіла 2 динамічної системи (рис. 1);

$R = 0,687$  м – радіус циліндричної поверхні, якою рухається тіло гасника коливань;

$r_0 = 0,1$  м – радіус циліндричної поверхні тіла 1, що торкається циліндричної поверхні тіла 2;

$r_1 = r_0$  та  $L_0 = 2,029$  м – варіант 1 рис.1;  $r_0 = 0,1$  м,  $r_1 = 0,135$  м,  $L_0 = 1,44$  м ( $\varepsilon=0,5$ ) – варіант 2 (рис. 2, 3);

$\beta = 2,809$  Нс/м – коефіцієнт, що характеризує дію сил тертя;  
 $k = 142,075$  Н/м – коефіцієнт пружності, що характеризує динамічну систему;

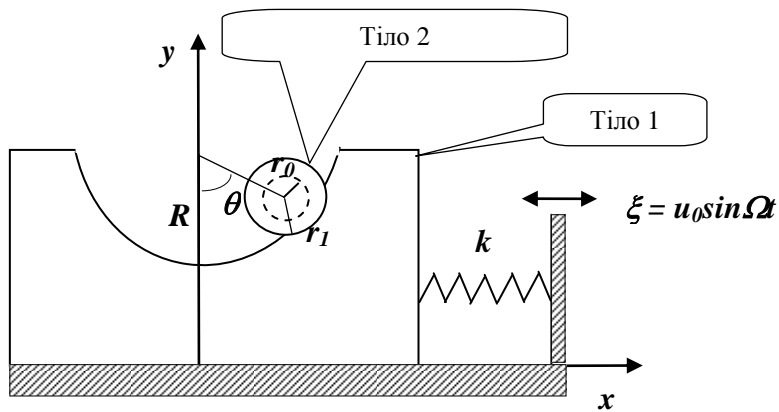


Рис. 2. Тіло 2 має форму “циліндричної гантелі”

$L_0 = 1,528$  м – довжина циліндра (рис. 1, 2);  
 $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup> – прискорення вільного падіння;  
 $\Omega = 2,653$  Гц – частота зовнішньої сили;  
 $u_0 = 0,002$  м – амплітуда зовнішньої сили;  
 $J = 2,495 \times 10^{-3}$  кг $\times$ м<sup>2</sup> – розрахунковий момент інерції гасника (тіло 1) – варіант 1 (рис. 1);  
 $J = 3,809 \times 10^{-3}$  кг $\times$ м<sup>2</sup> – розрахунковий момент інерції гасника (тіло 1) – варіант 2 (рис. 2, 3).

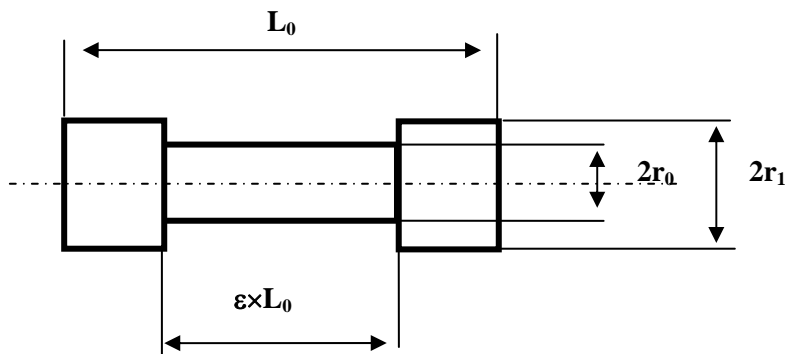


Рис. 3. Розміри тіла 2, гасника, що має форму “циліндричної гантелі”

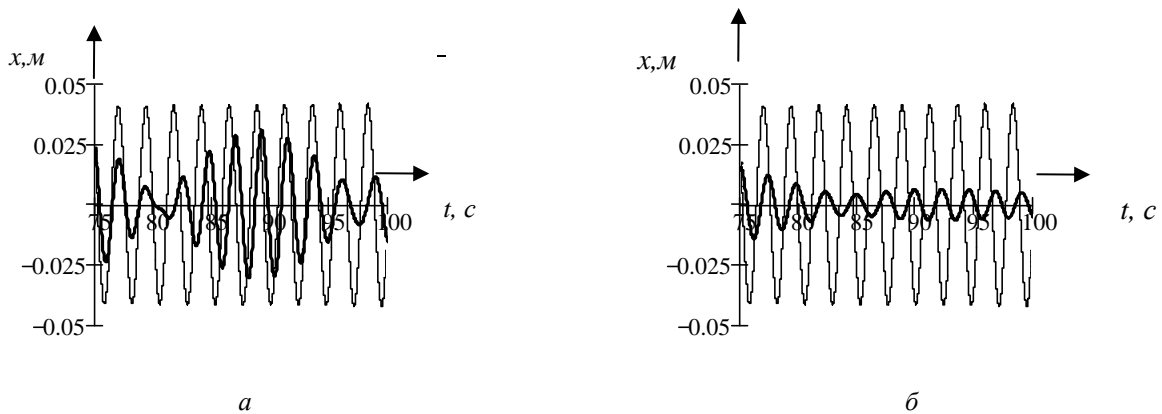


Рис. 4. Амплітуди коливань динамічної системи з двох тіл:  
 а – циліндричний гасник (рис. 1); б – гасник у вигляді “циліндричної гантелі” (рис. 2)

На рис. 4, а, б графічно зображено результати розрахунку функції  $x(t)$ , що описує рух тіла 2 динамічної системи (рис. 1, 2). Розв'язок системи чотирьох диференціальних рівнянь першого порядку (13) здійснено числовим методом Рунге-Кутта з застосуванням системи MATHCAD і показано у вигляді графіків (рис. 4). Тонкі лінії на графіках рис. 4, а, б зображають коливання тіла 1 під дією збурювальної сили без застосування гасника коливань тіла 2 (товсті лінії – з застосуванням гасника).

**Висновки.** Отримано числовий розв'язок системи диференціальних рівнянь, що описують динаміку коливань механічного гасника циліндричного типу. Розглянуто два варіанти форм гасника тіла 2:

- у формі циліндра (описаний в [5] (рис. 1));
- у формі “циліндричної гантелі” (запропоновано автором (рис. 2, 3)).

Гасник у формі “циліндричної гантелі” має більший момент інерції ( $J = 3,809 \times 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ), ніж гасник у формі циліндра ( $J = 2,495 \times 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ) за тієї самої маси  $m = 0,5 \text{ кг}$ . На рис. 4, а амплітуда коливань з гасником періодично зменшується, а під час застосування запропонованої форми гасника амплітуда коливань стабільно зменшується більше ніж у чотири рази (рис. 4, б).

Збільшення моменту інерції гасника механічних коливань привело до ефективнішого гасіння зовнішніх збурювальних впливів.

Отже, ефект гасіння механічних коливань підвищено зміною форми гасника та вибору його конструктивних розмірів.

Подальші дослідження передбачають розроблення методики оптимізації конструктивних розмірів гасника у вигляді “циліндричної гантелі” з метою максимізації ефекту гасіння зовнішніх збурювальних впливів.

1. Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г. Развитие метода продолжения за параметром для виброударных систем при моделировании удара силовой контактной взаимодействия // ISSN 0132-1471. Опір матеріалів і теорія споруд. – 2011. – № 87.
2. Судак Ф.М., Вороніна І.Ф., Алтухов Д.П. Зменшення шуму двигунів внутрішнього згоряння за допомогою механічних демпферних пристроїв // АДІ ДВНЗ “ДонНТУ”, м. Горлівка: <http://ea.donntu.edu.ua:8080/jspui/bitstream/>.
3. Лебеза В.П., Лебеза Д.В. Математична модель динамічної системи із двомасовим маятником: [http://www.nbuv.gov.ua/portal/soc\\_gum/nvnapu\\_ppf/2010\\_150/10ldv.pdf](http://www.nbuv.gov.ua/portal/soc_gum/nvnapu_ppf/2010_150/10ldv.pdf).
4. Лебеза В.П., Гузенко С.В. Математична модель динамічної поведінки віброзахисної системи її маятниковим гасником типу “гантеля”: <http://dspace.nuft.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/2647/1/matmodel.pdf>.
5. Левина Е.Е., Маневич А.И. Вынужденные нелинейные колебания тела с цилиндрическим гасителем колебаний // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – 2010. – Вип. 11: [http://www.nbuv.gov.ua/\\_scripts/wwwi32.exe/%5Bin=\\_scripts/ref.in%5D](http://www.nbuv.gov.ua/_scripts/wwwi32.exe/%5Bin=_scripts/ref.in%5D).
6. Вибрации в технике. – Т.6. Защита от вибраций и ударов: справочник / под ред. К.В. Фролова. – М.: Машиностроение, 1981. – 456 с.
7. Корнеев Б.Г. Динамические гасители колебаний / Б.Г. Корнеев, Л.М. Резников. – М.: Наука, 1988. – 304 с.
8. Клименко А.А., Милин Ю.В. Нелинейные формы колебаний механической системы с маятниковым гасителем колебаний // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40.