

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНИХ ПРИСТРОЇВ ЯК ЕЛЕМЕНТІВ СИСТЕМ

© Чабан В.Й., 2007

Здійснено порівняльний аналіз основних видів математичних моделей електротехнічних пристроїв з погляду їхнього використання як моделей елементів електромеханічних та автономних електроенергетичних систем.

In the article the comparative analysis of basic types of mathematical models of electrical engineering devices is carried out under the corner of their use as models of elements of the electromechanics and autonomous electroenergy systems.

Постановка проблеми. Сьогодні методи математичного моделювання достатньо опрацьовані й дають можливість розв'язувати порівняно складні задачі. Але проблема полягає в тому, що недостатньо є прийнятних математичних моделей конкретних технічних пристроїв. На щастя, електромеханіка та електроенергетика володіють порівняно великим арсеналом опрацьованих математичних моделей найважливіших елементів своїх систем. На жаль, мало хто з дослідників і досі обізнаний з тонкощами принципів побудови математичних моделей електротехнічних пристроїв.

Усі математичні моделі електротехнічних пристроїв діляться на три великі групи: колові, коло-польові, польові. Колові моделі найпростіші. Вони виконані на підставі теорії електричних або електромагнетних кіл. Польові – на підставі теорії електромагнетного поля. Це найскладніші моделі і ще далекі до завершення. Коло-польові одержані на підставі поєднання методів теорії кіл і теорії електромагнетного поля. Такі моделі були вперше запропоновані нами [1]. В їхню основу покладено ідею, що до тих частин пристрою, у яких вихрові поля не відіграють принципової ролі, наприклад у ламінованих магнетопроводах, у провідниках невеликого перерізу доцільно застосовувати методи теорії кіл. А до тих частин, де ці поля відіграють помітну роль, а тим більше виконують робочі функції, варто застосовувати методи теорії електромагнетного поля, наприклад, суцільні магнетопроводи, суцільні струмопроводи тощо. Досвід показав, що це оптимальний підхід до створення прийнятних математичних моделей електротехнічних пристроїв як елементів системи. Підміна ж польових методів у такому разі коловими також непомірно ускладнює аналіз у сенсі комп'ютерної реалізації (наприклад, вносячи штивність тощо). Про використання польових моделей у цій ролі говорити ще зарано. Але це сказати замало. Річ у тім, що польові моделі діляться, своєю чергою, на два різко відмінні один від одного види. До першого належать ті моделі, у яких дослідник задається струмами, а вже за струмами обчислює поля. До другого – ті, у яких задаються напруги, прикладені до магнетних обмоток, як це є в реальності, а потім обчислюються струми й поля одночасно, а за потреби й необхідні механічні величини, наприклад, шлях, швидкість, прискорення тощо. Автор не працював взагалі з першим видом. Натомість вперше запропонував принцип побудови математичних моделей другого виду й реалізував ідею на практиці [2]. Але, оскільки польові моделі не відповідають вимогам поставленої у цій праці задачі, то надалі ми говоритимемо лише про колові й коло-польові моделі, їхні переваги і вади.

Аналіз результатів останніх досліджень. Сьогодні досконало не розроблено методику побудови усіх згаданих типів математичних моделей. Щодо побудови коло-полових моделей, то для певних пристроїв необхідно застосовувати індивідуальні підходи, які тією чи іншою мірою відображають точність одержаних результатів. Такий підхід, наприклад, детально описано в [4].

Задачі досліджень. Є чотири принципи побудови колових і коло-польових математичних моделей електротехнічних пристроїв. Модель, одержана за кожним з них, має власне призначення. Якщо не брати до уваги цю особливість, ми неминуче зіткнемося з невиправданими труднощами у розв'язанні конкретної задачі, а в багатьох випадках зйдемо навіть у безвихідь. Умовно моделі, одержані за тими принципами, названо як: N-моделі, Ψ -моделі, A-моделі й, нарешті, L-моделі. N- і L-моделі традиційні, а Ψ - й A-моделі були вперше запропоновані нами [1]. На особливостях кожної з них зупинимося нижче. Проілюструємо це на прикладі рівнянь двообмоткового трифазного трансформатора з E-подібним осердям.

Виклад основного матеріалу. 1. Колові математичні моделі. N-модель. Цей вид математичних моделей найпростіший. Історично він також є першим. У його основу покладені диференціальні рівняння магнетних обмоток, записані на підставі закону рівноваги напруг та електро-рушійних сил

$$\frac{d\Psi_j}{dt} = U_j - R_j I_j, \quad j = 1, 2, \quad (1)$$

де Ψ_j, U_j, I_j – колонки фазних повних поточкозчеплень, напруг і струмів первинної і вторинної обмоток: $h_j (h = \Psi, U, I) = (h_{jA}, h_{jB}, h_{jC})_t$; $R_j = \text{diag}(r_{jA}, r_{jB}, r_{jC})$ – матриці опорів:

Повні поточкозчеплення Ψ_j умовно подамо сумою поточкозчеплень дисипації й основного. Тоді струми знаходимо у звичний спосіб

$$I_j = \alpha_j (\Psi_j - w_j \Phi), \quad j=1,2, \quad (2)$$

де $\Phi = (\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C)_t$ – колонка основних потоків; α_1, α_2 – обернені індуктивності дисипації; w_1, w_2 – кількість витків обмоток.

Основні потоки будемо шукати за методом вузлових магнетних напруг [1]. Підпорядкуємо потоки окремих стрижнів Φ_A, Φ_B, Φ_C і потік Φ_0 , а також магнетні напруги V_k віток законам Кірхгофа

$$\Phi_A + \Phi_B + \Phi_C + \Phi_0 = 0; \quad V_A = V_B = V_C = V_0. \quad (3)$$

Рівняння вітки відображає залежність між її магнетними напругою й потоком

$$V_k = \sum_{i=1}^2 F_{ik} - V_k(\Phi_k), \quad k = A, B, C; \quad V_0 = \rho_0 \Phi_0, \quad (4)$$

де $V_k = \rho'_k(\Phi_k) \cdot \Phi_k$ – магнетна напруга k -ї вітки, причому $\rho'_k(\Phi_k)$ – статичний магнетний опір, який знаходимо за кривою намагнетчування пристрою $V=V(\Phi)$; $F_{ik} = w_i i_{ik}$ – МРС ik -ї обмотки; ρ_0 – опір потоку Φ_0 .

Рівняння (1)–(4) – N-модель трифазного трансформатора.

Ψ -модель. Продиференціюємо за часом алгебраїчні рівняння (3), (4)

$$\frac{d\Phi_A}{dt} + \frac{d\Phi_B}{dt} + \frac{d\Phi_C}{dt} + \frac{d\Phi_0}{dt} = 0; \quad \frac{dV_A}{dt} = \frac{dV_B}{dt} = \frac{dV_C}{dt}. \quad (5)$$

$$\frac{dV_k}{dt} = S_k - \rho''_k \frac{d\Phi_k}{dt}; \quad \frac{dV_0}{dt} = \rho_0 \frac{d\Phi_0}{dt}, \quad (6)$$

де S_k – магнетні дії віток

$$S_i = w_1 \alpha_1 (u_{1i} - r_{1i} i_{1i}) + w_2 \alpha_2 (u_{2i} - r_{2i} i_{2i}), \quad i = A, B, C, \quad (7)$$

а $\rho_k''(\Phi_k)$ – диференціальний магнетний опір стрижнів фаз, який знаходимо за кривою $V=V(\Phi)$.

Прийнявши напругу V_0 за вузлову, на підставі (5) – (7) за методом вузлових напруг [2] знайдемо

$$\frac{dV_0}{dt} = \frac{\lambda_A S_A + \lambda_B S_B + \lambda_C S_C}{T}, \quad (8)$$

де

$$T = \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C + \lambda_0; \quad (9)$$

де $\lambda_i, i = A, B, C, 0$ – магнетні провідності віток, причому

$$\lambda_i = 1 / (\rho_i''(\Phi_i) + \alpha_1 w_1^2 + \alpha_2 w_2^2), \quad i = A, B, C. \quad (10)$$

Підставляючи (1), (8), (9) у (6), одержимо диференціальне рівняння магнетних потоків стрижнів

$$\frac{d\Phi}{dt} = D_1 (U_1 - R_1 I_1) + D_2 (U_2 - R_2 I_2), \quad (11)$$

де

$$D_1 = \alpha_1 w_1 G; \quad D_2 = \alpha_2 w_2 G. \quad (12)$$

$$G = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \lambda_A(1-\lambda_A/T) & -\lambda_A\lambda_B/T & -\lambda_A\lambda_C/T \\ \hline -\lambda_B\lambda_A/T & \lambda_B(1-\lambda_B/T) & -\lambda_B\lambda_C/T \\ \hline -\lambda_C\lambda_A/T & -\lambda_C\lambda_B/T & \lambda_C(1-\lambda_C/T) \\ \hline \end{array}. \quad (13)$$

Вирази (1), (2), (11) – Ψ -модель трифазного трансформатора. Числова реалізація цієї моделі вже не потребує використання ітераційних циклів.

A-модель. Продиференціювавши за часом (2) й підставивши в отриманий результат(1), (12), отримуємо [2]

$$\frac{dI_1}{dt} = A_{11} (U_1 - R_1 I_1) + A_{12} (U_2 - R_2 I_2), \quad (14)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = A_{21} (U_1 - R_1 I_1) + A_{22} (U_2 - R_2 I_2), \quad (15)$$

де

$$A_{11} = \alpha_1 (1 - w_1 D_1); \quad A_{12} = -\alpha_1 w_1 D_2; \quad A_{21} = -\alpha_2 w_2 D_1; \quad A_{22} = \alpha_2 (1 - w_2 D_2). \quad (16)$$

Вирази (11), (14), (15) – **A-модель** трифазного тристрижневого трансформатора.

Диференціальні рівняння струмів однієї з обмоток можна опустити, наприклад, первинної. Її струми знаходимо згідно з (3), (4)

$$i_{1i} = \frac{\rho_i' \Phi_i - \rho_0 (\Phi_A + \Phi_B + \Phi_C) - w_2 i_{2i}}{w_1}, \quad i = A, B, C. \quad (17)$$

Диференціальні рівняння (11), (15) і алгебраїчне (17) теж становлять **A-модель** трифазного тристрижневого трансформатора.

У багатьох практичних станах фазні напруги, струми й магнетні потоки третьої фази можна визначити через відповідні величини решти двох фаз

$$h_{jC} (h = u, i; j = 1, 2) = -h_{jA} - h_{jB}; \quad \Phi_C = -\Phi_A - \Phi_B. \quad (18)$$

Тоді можна перейти від шести диференціальних рівнянь, що фігурують у (14), (15), до чотирьох. За таких умов субматриці струмів, напруг, потоків скорочуються за рахунок третьої фази, а матриця (13) має вигляд

$$G = \begin{bmatrix} \lambda_A(1 - (\lambda_A - \lambda_C)/T) & -\lambda_A(\lambda_B - \lambda_C)/T \\ -\lambda_B(\lambda_A - \lambda_C)/T & \lambda_B(1 - (\lambda_B - \lambda_C)/T) \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Для ненасиченого трансформатора $\lambda_A = \lambda_B = \lambda_C = \lambda_T$. Тоді матриця (19) вироджується в скаляр $G = \lambda_T$ і ми приходимо до найпростішої математичній моделі трифазного трансформатора [3], яка збігається з відповідною моделлю загальмованого асинхронного мотора, що значно спрощує аналіз систем асинхронного електропривода.

У матриці (13), (19) входять магнетні провідності віток – λ -коефіцієнти. Зручніше перейти до обернених індуктивностей – α -коефіцієнтів. Цей перехід зумовлений масштабами кривих намагнечування. Для кривої $V = V(\Phi)$ маємо λ -коефіцієнти. Якщо ж крива задана в масштабі $i = i(\psi)$, маємо α -коефіцієнти. За основу переходу приймаємо такі співвідношення

$$\lambda_i = 1 / \left(w_1^2 (\alpha_i + \alpha_1 + \alpha_2') \right), \quad i = A, B, C; \quad \alpha_2' = \alpha_2 w_2^2 / w_1^2, \quad (20)$$

але α -коефіцієнти передбачають приведення однієї з обмоток за кількістю витків до іншої. Рівняння з λ -коефіцієнтами оперують реальними струмами й напругами обмоток, що важливо для аналізу багатозвулових систем.

L-модель. До цього виду моделей приходимо в результаті диференціювання колонок повних потокозчеплень за колонками струмів

$$L_{11} \frac{dI_1}{dt} + L_{12} \frac{dI_2}{dt} = U_1 - R_1 I_1; \quad L_{21} \frac{dI_1}{dt} + L_{22} \frac{dI_2}{dt} = U_2 - R_2 I_2, \quad (21)$$

де

$$L_{ik} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial I_k}, \quad i, k = 1, 2 \quad (22)$$

– субматриці диференціальних індуктивностей пристрою. Їх можна ідентифікувати, порівнявши рівняння (21) з рівняннями (14), (15)

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \right)^{-1}. \quad (23)$$

Вирази (11), (21) – L-модель трифазного трансформатора.

2. Коло-польові математичні моделі. Коло-польові математичні моделі одержуємо у такий самий спосіб, як і колові, тільки в колові рівняння електричних і магнетних контурів, записані за другим законом Кірхгофа, треба додати окремі доданки

$$\sum_k u_k + E(0)l = 0; \quad \sum_k V_k + H(0)l = 0, \quad (24)$$

де $E(0)$ – значення напруженості електричного поля на поверхні тієї частини струмопроводу, на якій враховується електричний скін-ефект; $H(0)$ – значення напруженості магнетного поля на поверхні тієї частини магнетопроводу, на якій враховується магнетний скін-ефект; l – довжина відповідного проводу. Здебільшого (22) не порушує структури рівнянь математичної моделі. Так, для моделі глибокопазного мотора достатньо такий доданок, що відповідає пазовій частині провідника ротора, додати в праву частину вихідного рівняння (1) [2].

Обчислення (22) пов'язане з інтегруванням рівнянь квазістационарного електромагнетного поля [2], записаних стосовно векторів \mathbf{B} , \mathbf{H} , \mathbf{E}

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma} \nabla \times \nabla \times \mathbf{H}; \quad \mathbf{H} = \mathbf{NB}; \quad \mathbf{E} = \frac{1}{\gamma} \nabla \times \mathbf{H}, \quad (25)$$

або вектор-потенціалу \mathbf{A}

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma} \nabla \times \mathbf{N} \nabla \times \mathbf{A}; \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}; \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (26)$$

де \mathbf{N} – матриця статичних релактивностей; γ – питома електропровідність.

У практичному аналізі рівняння (25), (26) значно спрощуються.

3. Порівняльний аналіз математичних моделей. Постає питання: а навіщо нам стільки моделей одного і того самого пристрою?

N-модель. Незручність цієї моделі зумовлена складністю розв'язання алгебро-диференціальних рівнянь – потребою застосування на кожному часовому кроці інтегрування ітераційних циклів. Тому її треба застосовувати у разі штивних рівнянь системи, у яку пристрій входить як один з її елементів. Бо тоді ітераційні цикли є невід'ємною процедурою числового інтегрування. Рівняння N -моделі у загальному випадку можна записати у вигляді

$$d\Psi / dt = U - RI; \quad \Phi = \Phi(\Psi); \quad I = \Lambda(\Psi - W\Phi), \quad (27)$$

де Ψ , U , I – колонки повних поточкозчеплень, електричних напруг, струмів; Φ – колонка основних магнетних потоків; R – матриця резистивних опорів обмоток; Λ – матриця обернених індуктивностей розсіяння обмоток; W – матриця кількості витків обмоток.

Ψ-модель найзручніша для побудови коло-польових моделей з урахуванням магнетного скін-ефекту. Її рівняння відрізняються від (27) тим, що рівняння зв'язку основних потоків і повних поточкозчеплень замінюються рівнянням зв'язку їхніх приростів

$$d\Psi / dt = U - RI; \quad d\Phi / dt = Gd\Psi / dt; \quad I = \Lambda(\Psi - W\Phi), \quad (28)$$

де G – матриця зв'язку приростів основних потоків і повних поточкозчеплень.

L-модель найневдаліша, бо її реалізація пов'язана з обертанням матриці коефіцієнтів на стадії числового інтегрування (для штивних рівнянь простіше використати N -модель!), що призводить до значної втрати точності, тому вона непридатна до аналізу тривалих перехідних процесів. Ці моделі застосовують в задачах аналізу нескладних систем методом контурних рівнянь. Хоч ці методи використовують дуже рідко, бо реальні системи містять дуже багато незалежних контурів за вкрай обмеженої кількості незалежних вузлів. Рівняння L -моделі запишемо аналогічно

$$LdI / dt = U - RI; \quad d\Phi / dt = G(U - RI), \quad (29)$$

де L – матриця диференціальних індуктивностей.

A-модель – модель найширшого вжитку для аналізу нештивних рівнянь, якими описуються реальні електромеханічні й електроенергетичні системи, де пристрій є їхнім елементом. Штивність рівнянь цих систем, як правило, штучно зумовлюється незнанням законів електротехніки, наприклад, законів комутації, невдалим описанням роботи тиристорів тощо. Ця модель найкраще пристосована до вузлових рівнянь, якими описуються реальні системи, як такі, що містять безліч контурів за обмеженої кількості вузлів. Крім того, це єдина модель, у якій немає процедури віднімання двох близьких величин на кшталт (2) (у L -моделі ця процедура виникає на етапі обертання матриці коефіцієнтів!). Тому це єдина математична модель, яка уможливує аналіз тривалих перехідних процесів [4]. Рівняння A -моделі

$$dI / dt = A(U - RI); \quad d\Phi / dt = G(U - RI), \quad (30)$$

де A – матриця обернених ідуктивностей.

Зіставляючи перший вираз (29) з (30), бачимо, що $A = L^{-1}$.

На випадок коло-польових моделей (25) – (28) треба доповнити виразами (25) або (26).

Відзначимо, що можна будувати змішані моделі, у яких частина контурів описується за принципами Ψ -, A - й L -моделей.

Висновки. 1. Кожна з розглянутих чотирьох видів математичних моделей електротехнічних пристроїв одержана за одних і тих самих допущень, тому з погляду математичного аналізу вони

рівноцінні. Але з погляду комп'ютерної реалізації вони надто різні. Кожна з них має власне призначення. Заміна однієї іншою може істотно ускладнити аналіз.

2. Матриця L коефіцієнтів L -моделі (29) без будь-яких спотворень входить у суму елементів субматриць матриці рівнянь системи, записаних за методом контурних рівнянь. Матриця A коефіцієнтів A -моделі аналогічно входить у суму елементів субматриць матриці рівнянь системи, записаних за методом вузлових напруг. Ці моделі у названих методах дають можливість на підставі схожого математичного апарату здійснювати аналіз перехідних і усталених процесів, визначити статичну стійкість усталених процесів, а заодно й параметричну чутливість в усталених і перехідних процесах [2].

1. Чабан В. И. *Основы теории переходных процессов электромашиных систем.* – Львів: Вища шк., 1980. – 200 с. 2. Чабан В. *Математичне моделювання електромеханічних процесів.* – Львів, 1997. – 344 с. 3. Чабан В., Чабан О., Крижак С. *Найпростіша математична модель трифазного трансформатора // Електроінформ.* – 2006. – № 4. – С. 22. 4. Чабан А. *Математичне моделювання коливних процесів у електромеханічних системах.* – Львів: Вид-во Тараса Сороки, 2007. – 312 с.

УДК 62-83:621.313.3

А.В. Маляр, А.Р. Тацій

Національний університет “Львівська політехніка”, м. Львів

ВИЗНАЧЕННЯ ЕКСПЛУАТАЦІЙНИХ ПАРАМЕТРІВ АСИНХРОННИХ ДВИГУНІВ В ЕЛЕКТРОПРИВОДАХ ВЕРСТАТІВ-ГОЙДАЛОК

© Маляр А.В., Тацій А.Р., 2007

Розглядається питання визначення коефіцієнта потужності та коефіцієнта корисної дії асинхронного двигуна в електроприводі штангової нафтовидобувної установки на підставі розрахунку часових залежностей миттєвих значень споживаної потужності, струму та швидкості обертання кривошипа протягом подвійного ходу плунжера помпи з урахуванням змінного навантаження та моменту інерції.

The issue of determining power factor and performance factor of the asynchronous motor in the electric drive of the rod oil pumping unit on the grounds of calculating time dependencies of current values of supply power, current and speed of the crank during double stroke of the pump piston, variable load and inertia moment being taken into account, is considered.

Вступ. Видобування нафти із свердловин на більшості нафтових родовищ України здійснюється глибинними плунжерними помпами, які приводяться в рух за допомогою верстатів-гойдалок, встановлених на поверхні землі біля кожної свердловини. Привідним двигуном верстата-гойдалки, як правило, слугує трифазний асинхронний двигун (АД) з короткозамкненим ротором. Він є основним елементом електропривода і споживачем електричної енергії, тому його правильний вибір та ефективна експлуатація є першочерговою задачею.

Стан проблеми. У стаціонарному режимі роботи навантаження АД привода верстата-гойдалки нафтовидобувної установки періодично змінне [1]. Воно має два максимуми і два мінімуми за період, який визначається частотою ходів (5–15 за хвилину) плунжерної глибинної помпи, причому