

М.: Машгиз, 1962. – 267 с. 7. Ловейкін В.С. Оптимізація режимів руху машин і механізмів // *Машинознавство*. – 1999. – № 7. – С. 24–31. 8. *Пожарная техника: Учеб. для пожарно-техн. училищ. В 2 ч. Ч. 2: Пожарные автомобили / А.Ф. Иванов, П.П. Алексеев, М.Д. Безбородько и др.; Под ред. А.Ф. Иванова*. – М.: Стройиздат, 1988. – 286 с. 9. Харченко Є.В., Квашиєнко О.І. Коливання багато секційної строїли автомобільного крана при утримуванні вантажу змінної маси // *Проектування, виробництво та експлуатація автотранспортних засобів і поїздів: Зб. Наук. пр. Вип. 2*. – Львів: Асоціація “Автобус” Мінпромполітики України, 1999. – С. 94–96. 10. Харченко Є.В., Петренко А.М. Розрахунок поздовжньо-поперечних коливань стримувальних металокопункцій значної довжини зі змінними пружно-інерційними характеристиками // *Пожарна безпека: Зб. наук. пр.* – 2004. – № 4. – С. 187–193. 11. Borkowski W., Konopka S., Prochowski L. *Dynamika maszyn roboczych*. – Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1996. – 363 s. 12. Swider J., Wojnarowski J. *Metoda macierzowych kratow hybrydowych w wyznaczeniu stresu niejednoznaczności pociągnięcia organów wykonawczych maszyn roboczych // Mechanika*. – 2. 48 – *Problemy dynamiki konstrukcji*. – T. II. – Rzeszów: Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, 1996. – S. 213–220. 13. Tomczyk J. *Modele dynamiczne elementów i układów napędów hydrostatycznych*. – Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1999. – 229 s.

УДК 534.111

Б.І. Сокіл, Х.І. Ліщинська*

Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра теоретичної механіки,
* кафедра опору матеріалів

АСИМПТОТИЧНИЙ МЕТОД І ПЕРІОДИЧНІ АТЕВ-ФУНКЦІЇ У ДОСЛІДЖЕННІ КОЛИВНИХ ПРОЦЕСІВ РУХОМИХ НЕЛІНІЙНО ПРУЖНИХ ОДНОВИМІРНИХ СИСТЕМ

© Сокіл Б.І., Ліщинська Х.І., 2006

Узагальнюючи, на основі використання періодичних Атев-функцій, асимптотичний метод Крилова–Боголюбова–Митропольського на один клас диференціальних рівнянь з частинними похідними, отримано залежності, які визначають вплив кінематичних і фізико-механічних параметрів динамічних систем на їх амплітудно-частотну характеристику.

Generalizing, on the basis of use of periodic Ateb-functions, asymptotic method of Krylov-Bogolyubov-Mitropolsky on one class of the differential equations with partial derivatives, it is received dependences which define agency of kinematic and physicomachanical parameters of dynamic systems on their amplitude-frequency characteristic.

Актуальність і постановка задачі. Питання застосування одночастотного методу нелінійної механіки [1, 2] для розв’язання диференціальних рівнянь з частинними похідними, які описують коливні процеси одновимірних однорідних тіл, матеріал яких задовольняє нелінійний закон пружності, розглядалися, наприклад, у [3]. Такі задачі є актуальними [3–5], проте їх вивчення через відсутність загальних підходів до їх розв’язання пов’язане із значними математичними труднощами. Нижче, на основі використання спеціальних Атев-функцій [6, 7] поєднано з асимптотичним методом КБМ, методом одночастотних коливань [2], викладено підхід до дослідження деяких класів із них (зокрема систем, які характеризуються поздовжнім чи обертальним рухом: рухомих валів, стрижнів, канатів тощо). Вважають, що пружні властивості матеріалу досліджуваних тіл

апроксимуються степеневою (або близькою до неї) залежністю: $\sigma = k\varepsilon_x^{\nu+1}$, де σ – напруження в тілі, ε_x – відносна деформація, $\nu+1$ – показник нелінійності ($\nu > -1$). У вказаному випадку диференціальні рівняння з частинними похідними, які описують коливні процеси вказаних систем у випадку: а) малих швидкостей руху середовища; б) незначного відхилення пружних характеристик матеріалу тіла від наведеного вище закону пружності; в) малих порівняно із пружною відновлювальною силою сил тертя, дисипативних сил, зовнішніх періодичних збурень, допускають застосування методу Фур'є для знаходження одночастотних розв'язків їх незбурених аналогів, та асимптотичних методів нелінійної механіки для розв'язання збурених задач.

Математичною моделлю динамічних процесів у наведених вище одновимірних рухомих тілах за прийнятих допущень є диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu f_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \quad (1)$$

в якому $\alpha^2 = \frac{(\nu+1)k}{b}$ (для стрижня $b = \rho F_0$, ρ – погонна густина, F_0 – площа поперечного перерізу; для валу b – момент інерції відносно осі обертання); V – швидкість руху тіла (і відповідно кутова швидкість обертання валу); μ – малий параметр, який вказує на малу величину сили тертя, дисипативних, в'язко-пружних сил, аналітичною апроксимацією яких є функція $f_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$.

Рівняння (1), у якому $\nu+1 = \frac{2n+1}{2m+1}$ ($m, n = 0, 1, 2, \dots$) розглядатимемо для однорідних крайових умов вигляду

$$u(x, t) \Big|_{x=0} = u(x, t) \Big|_{x=l} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \quad (3)$$

$$u(x, t) \Big|_{x=0} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \quad (4)$$

які відповідають коливанням однорідних тіл із: а) фіксованими положеннями двох точок (крайові умови у формі (2)); б) вільними кінцями (крайові умови у формі (3)); в) однією фіксованою точкою (крайові умови у формі (4)). Отже, метою роботи є дослідження впливу фізико-механічних і кінематичних параметрів динамічних систем, математичними моделями яких є рівняння (1), на амплітудно-частотну характеристику їх коливного процесу.

Методика розв'язування. В [8, 9] показано, що одночастотні розв'язки незбуреного рівняння, яке відповідає (1), тобто рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (5)$$

виражаються через періодичні Атеб-функції у вигляді

$$u_k(x, t) = a \operatorname{sa} \left(1, \frac{1}{\nu+1}, \Pi_x \frac{k}{l} x \right) \operatorname{ca}(\nu+1, 1, \omega_k(a)t), \quad (6)$$

$$u_k(x, t) = a \operatorname{ca} \left(1, \frac{1}{\nu+1}, \Pi_x \frac{k}{l} x \right) \operatorname{ca}(\nu+1, 1, \omega_k(a)t), \quad (7)$$

$$u_k(x, t) = a sa \left(1, \frac{1}{\nu+1}, \Pi_x \frac{2k+1}{2l} x \right) ca(\nu+1, 1, \omega_k(a)t), \quad (8)$$

де a – стала, $\Pi_x = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu+1}{\nu+2}\right)}$ – півперіод Атеб-функцій, які описують форму коливань тіла,

$\omega_k(a) = \alpha a^{\frac{\nu}{2}} \left(\frac{s \Pi_x}{l} \right)^{\frac{\nu+2}{2}}$ – власна частота коливань незбуреного аналогу тіла (s для розглядуваних крайових умов набуває відповідно значення k , k , $\frac{2k+1}{2}$).

Для визначення впливу малого збурення автономного типу та швидкості руху на коливання розглядуваного типу динамічних систем перейдемо до побудови розв'язку збуреного рівняння (1) за крайових умов (2), (3) чи (4). Вважаючи швидкість руху V малою, для побудови розв'язку вказаного рівняння можна використати узагальнення асимптотичного методу КБМ на розглядуваний клас крайових задач, відповідно до якого розв'язок рівняння (1) за крайових умов (2), (3) і (4) шукатимемо у вигляді модифікованого [9] асимптотичного ряду

$$u(x, t) = a X_k(x) T_k(\psi_k) + \mu U_1(a, x, T_k) + \mu^2 U_2(a, x, T_k) + \dots \quad (9)$$

Подання розв'язку збурених крайових задач для розглядуваного диференціального рівняння у традиційному (для квазілінійних систем) вигляді [2] приводить до значних математичних труднощів знаходжень “поправок” до розв'язків незбурених задач. На відміну від незбуреного (консервативного) випадку, параметри a , ψ_k для розглядуваного, взагалі кажучи, неконсервативного випадку будуть вже змінними величинами і як функції часу визначаються диференціальними рівняннями

$$\dot{a} = \mu A_1(a) + \mu^2 A_2(a) + \dots,$$

$$\dot{\psi}_k = \omega_k(a) + \mu B_1(a) + \mu^2 B_2(a) + \dots, \quad (10)$$

в яких функції $A_1(a)$, $B_1(a)$, $A_2(a)$, $B_2(a)$, ... визначаються так, щоб співвідношення (9) задовольняло вихідне рівняння (1) з відповідним ступенем точності, якщо в нього на місце a і ψ_k підставити функції часу, визначені (10).

Із крайових умов (2), (3) чи (4) випливає, що в асимптотичному ряді (9) функції $U_n(a, x, T_k)$ повинні задовольняти одну із крайових умов

$$U_n(a, x, T_k)_{x=0} = U_n(a, x, T_k)_{x=l} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial U_n(a, x, T_k)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial U_n(a, x, T_k)}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \quad (12)$$

$$U_n(a, x, T_k)_{x=0} = \frac{\partial U_n(a, x, T_k)}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \quad (13)$$

а добуток $X_k(x) T_k(\psi_k)$ виражається за допомогою періодичних Атеб-функцій у вигляді

$$X_k(x) T_k(\psi_k) = \begin{cases} sa \left(1, \frac{1}{\nu+1}, \frac{k \Pi_x}{l} x \right) ca(\nu+1, 1, \psi_k), \\ ca \left(1, \frac{1}{\nu+1}, \frac{k \Pi_x}{l} x \right) ca(\nu+1, 1, \psi_k) \\ sa \left(1, \frac{1}{\nu+1}, \frac{2k+1}{2l} \Pi_x x \right) ca(\nu+1, 1, \psi_k) \end{cases} \quad (14)$$

Підставляючи (9) в (1) з врахуванням (10), після прирівнювання коефіцієнтів за однакових степенів ε , отримуємо диференціальні рівняння для знаходження невідомих функцій

$$L_0(U_n) = \frac{4\omega_k^2(a)}{(\nu+2)^2} \frac{\partial}{\partial T_k} \left[(1-T_k^{\nu+2}) \frac{\partial U_n}{\partial T_k} + \frac{2\omega_k^2(a)}{\nu+2} T_k^{\nu+1} \frac{\partial U_n}{\partial T_k} - \right. \\ \left. - \alpha^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[(aT_k X'_k(x))^\nu \frac{\partial U_n}{\partial x} \right] \right] = F_n(a, x, T_k) - X_k(x) \left\{ A_n(a) \times \right. \\ \left. \times \frac{2}{\nu+2} (1-T_k^{\nu+2})^{\frac{1}{2}} \left(2\omega_k(a) + a \frac{d\omega_k}{da} \right) + \frac{4a}{\nu+2} \omega_k(a) T_k^{\nu+1} B_n(a) \right\}, \quad (15)$$

де

$$F_1(a, x, T_k) = f \left(aX_k(x)T_k, aX'_k(x)T_k, a\omega_k X_k(x) \frac{dT_k}{d\psi_k}, a\omega_k X'_k(x) \frac{dT_k}{d\psi_k}, 0 \right) + \\ + aT_k V^2 \left(\frac{s\Pi_x}{l} \right)^{\frac{3\nu+2}{\nu+1}} \frac{2}{\nu+2} X_k(x) (X'_k(x))^{-\frac{\nu}{\nu+1}} - 2aV \frac{dT_k}{d\psi_k} \omega_k(a) X'_k(x), \\ F_2(a, x, T_k) = \frac{\partial f(u, u_x, u_t, u_{xt}, \varepsilon)}{du} \Bigg|_{\substack{u=aX_k T_k \\ u_x=aX'_k T_k \\ u_t=a\omega_k X_k \frac{dT_k}{d\psi_k} \\ u_{xt}=a\omega_k X'_k \frac{dT_k}{d\psi_k} \\ \varepsilon=0}} U_1(a, x, T_k) + \\ + \frac{\partial f(u, u_x, u_t, u_{xt}, \varepsilon)}{du_t} \Bigg|_{\substack{u=aX_k T_k \\ u_x=aX'_k T_k \\ u_t=a\omega_k X_k \frac{dT_k}{d\psi_k} \\ u_{xt}=a\omega_k X'_k \frac{dT_k}{d\psi_k} \\ \varepsilon=0}} \cdot \left[\frac{\partial U_1}{\partial x} \frac{\partial T_k}{\partial \psi_k} \omega_k + X_k(x) \left(A_1(x) T_k + a \frac{dT_k}{d\psi_k} B_1(a) \right) \right] + \\ + \frac{\partial f(u, \dots, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Bigg|_{\substack{u=aX_k T_k \\ u_x=aX'_k T_k \\ u_t=a\omega_k X_k \frac{dT_k}{d\psi_k} \\ u_{xt}=a\omega_k X'_k \frac{dT_k}{d\psi_k} \\ \varepsilon=0}} + \frac{\partial f(u, \dots, \varepsilon)}{\partial u_x} \Bigg|_{\substack{u=aX_k T_k \\ u_x=aX'_k T_k \\ u_t=a\omega_k X_k \frac{dT_k}{d\psi_k} \\ u_{xt}=a\omega_k X'_k \frac{dT_k}{d\psi_k} \\ \varepsilon=0}} \cdot \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial f(u, \dots, \varepsilon)}{\partial u_{xt}} \Bigg|_{\substack{u=aX_k T_k \\ u_x=aX'_k T_k \\ u_t=a\omega_k X_k \frac{dT_k}{d\psi_k} \\ u_{xt}=a\omega_k X'_k \frac{dT_k}{d\psi_k} \\ \varepsilon=0}} \cdot \\ \cdot \left[\frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial T_k} \frac{dT_k}{d\psi_k} \omega_k + X'_k \left(A_1(a) + a \frac{dT_k}{d\psi_k} B_1(a) \right) \right] + \\ + A_1(a) \left\{ X_k(x) \left[T_k \frac{dA_1}{da} + \frac{dT_k}{d\psi_k} \left(a \frac{dB_1}{da} + 2B_1 \right) \right] + \frac{dT_k}{d\psi_k} \left(2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial a \partial T_k} \omega_k + \frac{\partial U_1}{\partial T_k} \frac{\partial \omega_k}{\partial a} \right) \right\} + \\ + B_1(a) \left\{ 2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial T_k^2} \left(\frac{dT_k}{d\psi_k} \right)^2 \omega_k(a) + \frac{d^2 T_k}{d\psi_k^2} \left(2 \frac{\partial U_1}{\partial T_k} \omega_k + a X_k(x) B_1(a) \right) \right\}.$$

Розв'язок рівняння (15) шукатимемо у вигляді

$$U_n(a, x, T_k) = \sum U_{nm}(a, T_k) X_m(x), \quad (16)$$

де $X_m(x)$ відомі функції, за допомогою яких знаходять розв'язки незбурених крайових задач. Тоді коефіцієнти розкладу функції $U_n(a, x, T_k)$ у ряд, тобто $U_{nm}(a, T_k)$ зв'язані лінійними диференціальними рівняннями

$$\begin{aligned} & \frac{4\omega_k^2}{(\nu+2)^2} \frac{\partial}{\partial T_k} \left[(1-T_k^{\nu+2}) \frac{\partial U_{nm}}{\partial T_k} \right] + \frac{2\omega_k^2}{\nu+2} T_k^{\nu+2} \frac{\partial U_{nm}}{\partial T_k} - \frac{2(\nu+1)}{\nu+2} \omega_k^2 \times \\ & T_k^\nu U_{nm}(a, T_k) = F_{nm}(a, T_k) - \delta_{km} \left\{ \frac{\nu+4}{2} \omega_k(a) \left[\frac{2}{\nu+2} (1-T_k^{\nu+2}) \right]^{\frac{1}{2}} \times \right. \\ & \left. \times A_n(a) + \frac{4\omega_k}{\nu+2} a T_k^{\nu+1} B_n(a) \right\} + a \frac{2V^2}{\nu+2} \left(\frac{s\Pi_x}{l} \right)^2 T_k \rho_k, \end{aligned} \quad (17)$$

де $\rho_k = P^{-1} \int_0^l (X'_k(x))^{-\nu} X_k^2(x) dx$, а $F_{nm}(a, T_k)$ – коефіцієнти розкладу функції $F_n(a, x, T_k)$ в ряд по системі ортонормованих функцій $\{X_k(x)\}$, тобто

$$F_{nm}(a, T_k) = P^{-1} \int_0^l F_n(a, x, T_k) X_m(x) dx.$$

Легко переконатись, що у разі подання функції $U_n(a, x, T_k)$ у вигляді ряду (16) крайові умови виконуватимуться автоматично. Перейдемо до визначення функцій $A_n(a)$ і $B_n(a)$, які входять у праві частини диференціальних рівнянь (10). Для цього розглянемо однорідне рівняння, яке відповідає (15), тобто

$$\begin{aligned} L(U_{nm}) = \frac{4\omega_k^2}{(\nu+2)^2} \frac{\partial}{\partial T_k} \left[(1-T_k^{\nu+2}) \frac{\partial U_{nm}}{\partial T_k} \right] + \frac{2\omega_k^2}{\nu+2} T_k^{\nu+2} \frac{\partial U_{nm}}{\partial T_k} - \\ - \frac{2(\nu+1)}{\nu+2} \omega_k^2(a) U_{nm} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Неперервні двічі диференційовані по T_k розв'язки однорідного рівняння (18), що задовольняють умову

$$\int_0^{2\Pi_T} U_{nm}(a, T_k(\psi_k)) \cdot \left\{ \begin{array}{l} ca(\nu+1, 1, \psi_k) \\ sa(\nu+1, 1, \psi_k) \end{array} \right\} d\psi_k = 0, \quad (19)$$

$$U_{nm}(a, T_k)_{T_k=\pm 1} = 0, \quad (20)$$

мають властивості

$$\int_0^{2\Pi_T} L(U_{nm}) ca(\nu+1, 1, \psi_k) d\psi_k = 0, \quad (21)$$

$$\int_0^{2\Pi_T} L(U_{nm}) sa(\nu+1, 1, \psi_k) d\psi_k = 0, \quad (22)$$

де $2\Pi_T$ – період по ψ_k функції $T_k(\psi_k)$, тобто

$$\Pi_T = \Pi(1, \nu+1). \quad (23)$$

Умови (19) еквівалентні умовам відсутності у розкладах функцій $U_{nm}(a, T_k)$ доданків, пропорційних $sa(1, \nu+1, \psi_k)$ і $ca(1, \nu+1, \psi_k)$.

Користуючись результатами, які випливають із (21) і (22), знаходимо із (17) функції $A_n(a)$ і $B_n(a)$ у вигляді

$$\begin{aligned} A_n(a) &= \frac{1}{2\Pi_T \omega_k(a)} \cdot \int_0^{2\Pi_T} F_{nk}(a, T_k(\psi_k)) sa(1, \nu+1, \psi_k) d\psi_k, \\ B_n(a) &= \frac{\nu+2}{4\Pi_T a \omega_k(a)} \cdot \int_0^{2\Pi_T} F_{nk}(a, T_k(\psi_k)) ca(\nu+1, 1, \psi_k) d\psi_k. \end{aligned} \quad (24)$$

Зокрема, для першого наближення розв'язку задач маємо

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\mu}{2\Pi_T \omega_k(a) P} \int_0^l \int_0^{2\Pi_T} X_k(x) f_1(a, x, T_k) sa(1, \nu+1, \psi_k) d\psi_k dx, \\ \frac{d\psi_k}{dt} &= \alpha a^{\frac{\nu}{2}} \left(\frac{s\Pi_x}{l} \right)^{1+\frac{\nu}{2}} - \frac{4\sqrt{\pi}}{\alpha l a^{\frac{\nu}{2}}} \left(\frac{s\Pi_x}{l} \right)^{\frac{\nu}{2}} \frac{3\nu+4}{\nu+2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\nu+2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{\nu+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\nu+2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{\nu+2}\right)} V^2 + \\ &+ \frac{\mu(\nu+2)}{4\Pi_T a \omega_k(a) P} \int_0^l \int_0^{2\Pi_T} X_k(x) f_1(a, x, T_k) sa(1, \nu+1, \psi_k) d\psi_k dx, \end{aligned} \quad (25)$$

де

$$f_1(a, x, T_k) = f\left(aX_k(x)T_k, aX'_k(x)T_k, a\omega_k(a)X_k(x)\frac{dT_k}{d\psi_k}, a\omega_k(a)X'_k(x)\frac{dT_k}{d\psi_k}, 0\right).$$

Отримавши на основі загальної методики визначення правих частин диференціальних рівнянь (10) функції $A_1(a)$ і $B_1(a)$, тобто, функції, які визначають закони зміни амплітуди і фази коливань у першому наближенні, перейдемо до знаходження першого покращеного і наступних наближень, тобто до знаходження функцій $U_{1m}(a, T_k)$ і $A_2(a)$, $B_2(a)$. Для цього розглянемо однорідне рівняння (18). Легко переконатись, що незалежними розв'язками цього лінійного рівняння є функції

$$\begin{aligned} \tilde{U}(a, T_k) &= \left[\frac{2}{\nu+2} (1-T_k^{\nu+2}) \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \tilde{\tilde{U}}(a, T_k) &= \left[\frac{2}{\nu+2} (1-T_k^{\nu+2}) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \int_0^{T_k} \left[\frac{2}{\nu+2} (1-T_k^{\nu+2}) \right]^{\frac{3}{2}} d\bar{T}_k. \end{aligned} \quad (26)$$

(В останніх виразах індекси у функціях U_{nm} опущені, тому що ліві частини диференціальних рівнянь мають однакові вигляди для будь-якого наближення). Маючи незалежні розв'язки лінійного однорідного рівняння, легко знайти [10] і частинний розв'язок неоднорідного рівняння, тобто $U_{nm}(a, T_k)$.

Як приклад розглянемо сильно нелінійні коливання рухомої одновимірної системи у випадку $f(u, u_x, u_t) = u_t(1-u^2)$. Перше наближення одночастотного динамічного процесу такої системи у випадку закріплення, яке узгоджується із крайовими умовами (2), (3) чи (4) описується відповідно залежностями (6) – (8), в яких a і ψ як функції часу визначаються звичайними диференціальними рівняннями

$$\dot{a} = \mu \frac{(\nu+2)a}{(\nu+4)(3\nu+4)P} - \mu \frac{0,75\pi a^3 \Gamma\left(\frac{3}{\nu+2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)}{(\nu+2)\Pi_x \Pi_T P \Gamma\left(1,5 + \frac{3}{\nu+2}\right) \Gamma\left(2,5 + \frac{\nu+1}{\nu+2}\right)}, \quad (27)$$

$$\dot{\psi} = \omega(a) - \frac{4(3\nu+4)\sqrt{\pi}}{(\nu+2)l\alpha} \left(\frac{l}{a\Pi_x} \right)^{\frac{\nu}{2}} V^2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\nu+2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{\nu+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\nu+2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{\nu+2}\right)}.$$

На графіках рис. 1 і 2 показано закони зміни частоти коливань від амплітуди і швидкості за різних значень параметра ν ($\nu = -\frac{2}{3}$ – рис. 1, $\nu = \frac{2}{3}$ – рис. 2), а на рис. 3 – закони зміни в часі амплітуди коливань за різних початкових значень та цих же значеннях параметра ν .

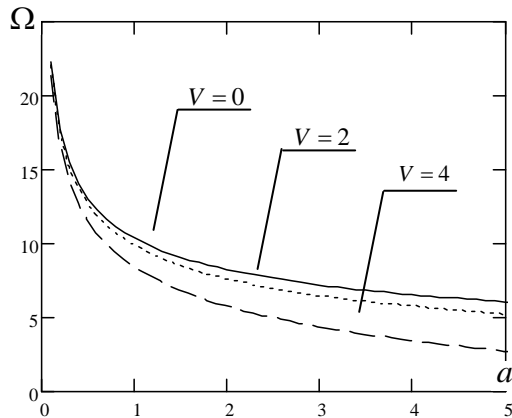


Рис. 1. Закони зміни частоти коливань від амплітуди і швидкості за різних значень параметра ν ($\nu = -\frac{2}{3}$)

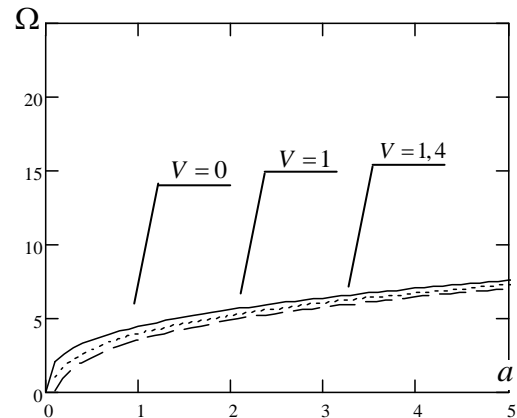


Рис. 2. Закони зміни частоти коливань від амплітуди і швидкості за різних значень параметра ν ($\nu = \frac{2}{3}$)

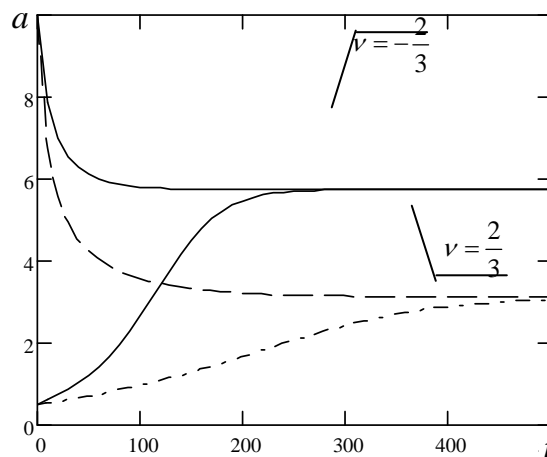


Рис. 3. Закони зміни в часі амплітуди коливань за різних початкових значень та цих же значеннях параметра ν

Із отриманих залежностей випливає:

1. Для випадку $-1 < \nu < 0$ із зростанням амплітуди частота коливань зменшується; для випадку $\nu > 0$ – навпаки: із зростанням амплітуди частота коливань зростає. Що стосується швидкості, то зростання швидкості руху середовища приводить в обох випадках до зменшення частоти коливань.

2. Величина стаціонарної амплітуди коливань із зростанням параметра ν зменшується, причому, амплітуда з часом спадає до стаціонарного значення у випадку $a_0 > a_{cm}$ і зростає у випадку $a_0 < a_{cm}$.

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 501 с. 2. Митропольский Ю.А. Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Вища школа, 1976. – 592 с. 3. Тарме М., Моут Л. Свободные периодические нелинейные колебания полосы, движущейся в осевом направлении: В кн. Тр. Американского общества инженеров-механиков. Прикладная механика. – М.: Мир, 1969. – 36, № 1. – С. 87–98. 4. Моут М., Нэгульсуорен Л. Теоретические и экспериментальные исследования вибраций ленточных пил: В кн. Тр. Американского общества инженеров-механиков. Конструирование и технология машиностроения. – М.: Мир, 1966. – 88, № 2. – С. 27–32. 5. Филимонов А.М. Периодические решения некоторых нелинейных уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. – 1976. – 12, № 11. – С. 2077–2084. 6. Сенник П.М. Про Ateb-функції // Доп. АН УРСР. – 1968. – № 1. – С. 23–26. 7. Сенник П.М. Обернення неповної Beta-функції // Укр. мат. журн. – 1969. – 21, № 3. – С. 325–333. 8. Сокил Б.И. Об асимптотических разложениях краевой задачи для одного нелинейного уравнения с частными производными // Укр. мат. журн. – 1982. – 34, № 6. – С. 803–805. 9. Сокил Б.И. Про застосування Ateb-функцій для побудови розв'язків деяких рівнянь, які описують нелінійні коливання одновимірних середовищ // Доп. НАН України. – 1997. – № 1. – С. 55–58. 10. Ляшко І.І., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Калайда А.Ф. Диференціальні рівняння. – К.: Вища школа, 1981. – 504 с.

УДК 534.111

М.Б. Сокил

Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра опору матеріалів

ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ РУХОМИХ СЕРЕДОВИЩ І АСИМПТОТИЧНИЙ МЕТОД ЇХНЬОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

© Сокил М.Б., 2006

Досліджено вплив періодичних збурень на нелінійні коливання одновимірних середовищ, які характеризуються поздовжнім (обертальним) рухом. В основу досліджень покладено узагальнення методу Д'Аламбера для одного класу лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, які не допускають відокремлення змінних; принцип одночастотності коливань у нелінійних системах; асимптотичний метод КБМ. Розглянуто резонансний і нерезонансний випадки.

Explored influence of periodic indignations on the nonlinear vibrations of onedimensional environments which are characterized longitudinal (rotatory) motion. In basis of researches generalization of method of d'Alambert is fixed for one class of linear differential equalizations with equation in private derivative which shut out the separation of variables, principle of the unique vibrations in the nonlinear systems, asymptotyc method of KBM. Resonance and unresonance cases are examined.

Актуальність. Аналітичні методи дослідження коливних процесів, які існують в одно- чи багатовимірних лінійно і нелінійно пружних системах достатньо розроблені як у теоретичному, так і практичному відношенні (див., наприклад, [1–5]). Проблема значно ускладнюється, якщо система