

$$S_{ij}(t) = \int_0^t \Psi_3(t-s) de_{ij}(s); \quad \sigma_o(t) = K\Theta(t).$$

Застосувавши принцип Вольтерра в [3], доведено, що вищенаведені вирази відповідають закону Гука для випадку об'ємного напруженого стану. Отже, будь-яка крайова задача теорії в'язко-пружності подібна до відповідної крайової задачі теорії пружності. Різниця полягає лише у тому, що замість пружних констант в задачах в'язко-пружності використовують інтегральні оператори, які їм відповідають.

Основною складністю розв'язку тієї чи іншої задачі є аналітичне задавання функції повзучості $\Phi(t)$ і релаксації $\Psi(t)$. У зв'язку з цим перспективним є запропонований і розроблений О. А. Ільюшиним [6] метод апроксимації розв'язку задач в'язко-пружності, який ґрунтується на застосуванні дослідних кривих повзучості і релаксації, що не вимагає аналітичного задавання функцій $\Phi(t)$ і $\Psi(t)$.

1. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. – М., 1976. – 277 с. 2. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия: Пер. с англ. – М., 1989. – 510 с. 3. Степанов Р.Д., Шлёнский О.Ф. Расчет на прочность конструкций пластмасс, работающих в жидких средах. – М., 1981. – 136 с. 4. Ли, Роджерс. Нахождение вязкоупругих напряжений при помощи измеренных функций ползучести и релаксации // Прикладная механика: Тр. Амер. об-ва инженеров-механиков. – М., 1963. – Т. 30, № 1. – С. 151–159. 5. Lee E.H., Radok J.R.M. The contact problem for viscoelastic bodies. – Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 1960. – 27. – P. 438. 6. Огибалов П.М., Ломанкин В.А., Кишкин Б.П. Механика полимеров. – М., 1975. – 528 с.

УДК 621.521

Р.М. Шеремета, І.І. Корсак

Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра “Електронне машинобудування”

КОНЦЕПТУАЛЬНА МОДЕЛЬ КОНТАКТУ ШОРСТКОЇ ПОВЕРХНІ З НАПІВПРОСТОРОМ

© Шеремета Р.М., Корсак І.І., 2002

Розроблено математичну модель контактування нерівності шорсткого шару полімерної поверхні. Модель враховує взаємний вплив мікронерівностей і об'ємну деформацію матеріалу на параметри зони контакту.

In article is developed the mathematical model of contact the ledges of a roughness polymeric surface. In this model is taken into account the interference of ledges and volumetric deformation the material on contact parameters.

Процеси контактної взаємодії шорстких поверхонь моделюються з певними припущеннями і являють собою наближені моделі. Для більш повного моделювання пропонується концептуальна модель контакту шорсткої поверхні.

За концептуальну вважається абстрактна модель, яка визначає причинно-наслідкові зв'язки процесу контактної взаємодії, врахування яких є необхідним для визначення достовірних контактних характеристик.

Розглянемо квазістатичний контакт шорсткої поверхні з напівпростором, оскільки контакт двох шорстких поверхонь можна уявити як контакт еквівалентної шорсткості і гладкої поверхні. У ненавантаженому стані контакт відбувається в окремих точках – вершинах нерівностей, які розташовані на рівні максимальних вершин. При прирощенні навантаження в контакт вступають нові нерівності і утворюються окремі плями контакту. Кожна пляма контакту є джерелом поля напружень і деформацій. Загальна картина напружено-деформованого стану являє собою суперпозицію полів напружень і деформацій окремих джерел. Таким чином, число плям контакту, їх розміри і напруження на них визначаються не тільки функцією розподілу вершин і впадин нерівностей, формою і розмірами нерівностей, загальним переміщенням шорсткої поверхні, але і переміщеннями точок поверхні напівпростору, які, своєю чергою, є функціями від числа плям контакту, їх розмірів, напружень на них і пружно-пластичних властивостей напівпростору. Зі зростанням навантаження зростає контурний тиск в стикі шорсткої поверхні і напівпростору q_c

$$q_c = \frac{N}{A_c},$$

де N – загальне нормальне навантаження на стик; A_c – контурна площа стиків.

Нехай q_{cs} – значення контурного тиску, при якому з напівпростором контактують всі нерівності поверхні, тобто $n_r = n_{cs}$, n_r – число контактуючих нерівностей.

Величину радіуса зони дії тисків q_{vi} при їх інтенсивності q_c можна визначити з рівності тисків q_c і середніх тисків на нерівності, що надаються на зони поза межами ділянки W_{vi} , тобто на зону з межами $(\rho = \overline{O, a_{vi}})$

$$q_c = \frac{N_i}{\pi a_{vi}^2} = q_{ci} \left(\frac{a_{ci}}{a_{vi}} \right)^2,$$

де N_i – загальне зусилля, що припадає на одну пляму контакту.

При $q_c < q_{cs}$ відбувається збільшення числа плям контакту і їх розмірів, а при $q_c \geq q_{cs}$ – тільки збільшення їх розмірів. Із зростанням q_c буде також збільшуватися вплив загального поля напружень і деформацій на напружено деформований стан напівпростору, що приводить до вирівнювання як напружень на окремих плямах контакту, так і переміщень точок поверхні напівпростору. Розглянемо контакт окремої абсолютно жорсткої сферичної нерівності радіусом r_i , вершина якої розташована на відстані uR_{\max} від лінії вершин шорсткої поверхні, а впадина – на відстані vR_{\max} від лінії впадин, з пружно-пластичним напівпростором в системі циліндричних координат z, ρ, ϕ з початком в точці O , що належить недеформованій поверхні напівпростору (див. рисунок).

Введемо такі припущення.

1. Полімерний матеріал є лінійно в'язко-пружним, для якого є прийнятним підхід Радока [1], згідно з яким розв'язок контактної задачі для лінійно в'язко-пружних тіл зводиться до заміни пружних сталей у відомому чисто пружному розв'язку – відповідними інтегральними операторами з визначальних співвідношень в'язко-пружності. Так, що в подальшому обмежимося розглядом контакту шорсткої абсолютно жорсткої поверхні з пружним напівпростором.

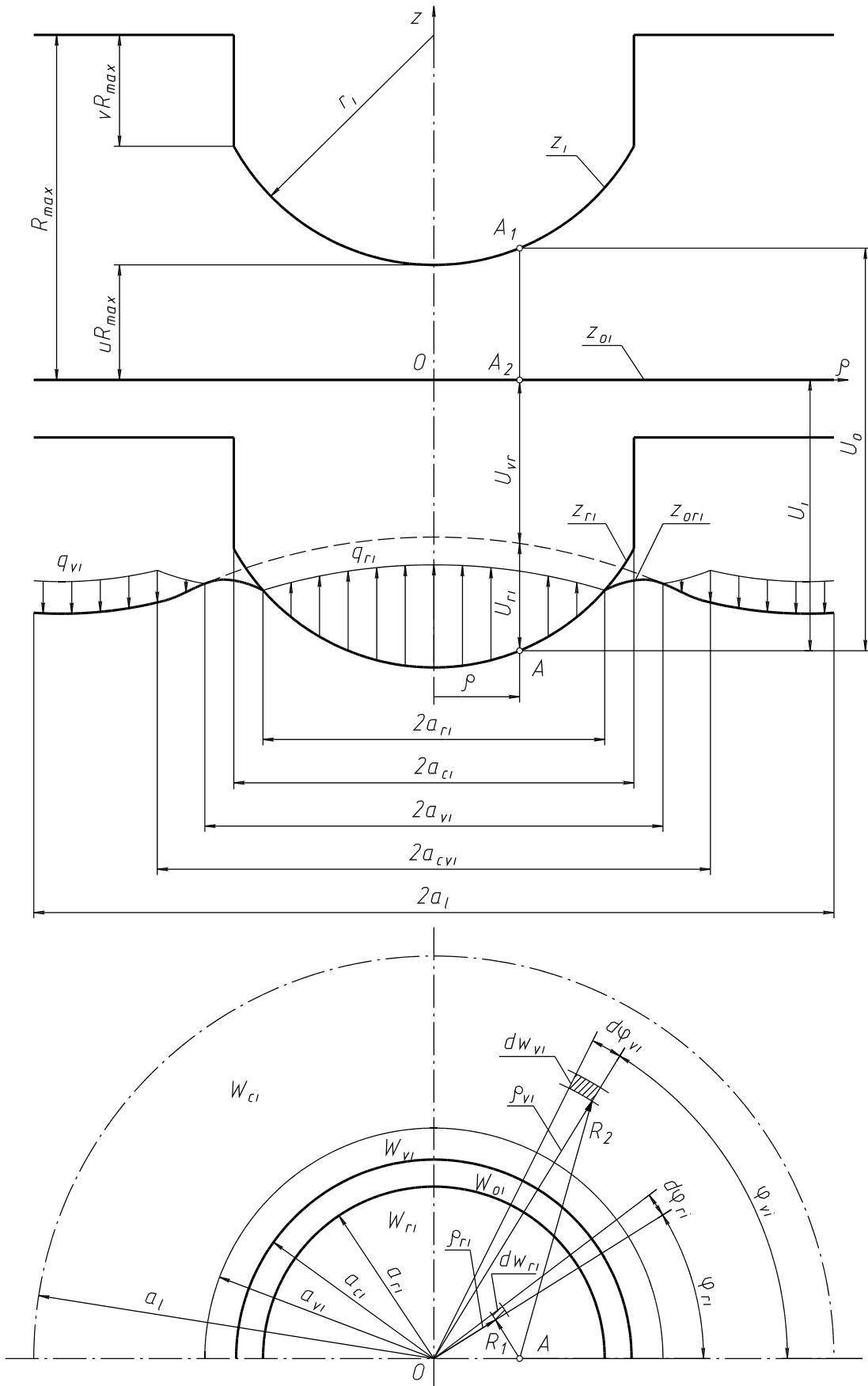


Схема контакту окремої нерівності

2. Радіус кругової ділянки контакту окремої нерівності набагато менший за її радіус, тобто $a_{ri} \ll r_i$.

3. Радіальні переміщення точок поверхні напівпростору нехтуючи малі порівняно з осьовими.

4. Матеріал напівпростору є нестискуваним (таке припущення є цілком прийнятним для полімерів, коефіцієнт Пуассона яких, як правило, перевищує 0,4), отже, визначальні співвідношення між напруженнями і деформаціями для в'язко-пружного матеріалу виражаються за допомогою єдиної функції, яка описує його поведінку при зсуві, а сили тертя впливу на напружено-деформований стан не чинять.

Згідно з принципом Сен-Венана напруження і деформації в точці, що достатньо віддалена від зони навантаження, не залежать від характеру розподілу навантаження в зоні її прикладання. Отже, вплив напружено-деформованого стану решти нерівностей на характеристики контакту окремої нерівності еквівалентний до дії деякого навантаження у деякій кільцевій зоні. З аналізу багаточисленних розв'язків контактних задач теорії пружності виходить, що зміна розподілу зовнішніх навантажень поблизу розглядуваної зони контакту при сталості їх середньої інтенсивності призводить до незначних змін лише поблизу меж зони контакту. Тоді, враховуючи випадковий характер взаємного розташування окремих плям контакту, вплив напружень на решта плямах контакту на характеристики контакту окремої нерівності в межах кругової зони контакту $W_{ri}(\rho = \overline{0, a_{ri}})$ і кільцевої ненавантаженої зони $W_{oi}(\rho = \overline{a_{ri}, a_{ci}})$ буде еквівалентним до впливу деякого навантаження q_v , що за інтенсивністю дорівнює математичному сподіванню навантаження поза межами розглядуваної контурної зони $W_{vi}(\rho = \overline{a_{vi}, a_l})$, ($a_{vi} \geq a_{ci}$) і поставлену задачу можна розглядати як осесиметричну (рисунок).

Очевидно, що на достатньому віддаленні від розглядуваної зони контакту (близько до середнього кроку нерівностей) $W_{ci}(\rho = \overline{a_{cvi}, a_l})$, ($a_{cvi} \geq a_{vi}$), маємо $q_v = q_c$.

Нехай у ненавантаженому стані поверхня напівпростору описується функцією $z_{oi} = 0$, а поверхня нерівності – функцією z_i , а в навантаженому стані – функціями z_{oki} і z_{ri} у введений раніше нерухомій системі координат.

З початкової постановки задачі

$$\left. \begin{aligned} z_i = z_i(\rho) &= uR_{\max} + \rho^2 / 2r_i \\ z_{oi} &= 0 \end{aligned} \right\} \rho = \overline{0, a_{ci}} . \quad (1)$$

Нехай після прикладання навантаження нерівність перемістилась на величину U_0 , а точки поверхні напівпростору – на величину U_i в напрямку осі OZ. Тоді

$$\left. \begin{aligned} z_{ri} = z_{ri}(\rho) &= z_i + U_0 \\ z_{ori} = z_{ori}(\rho) &= z_{oi} + U_i \end{aligned} \right\} \rho = \overline{0, a_{ci}} . \quad (2)$$

Використовуючи принцип суперпозиції, переміщення U_i показані у вигляді

$$U_i = U_{ri} + U_{vi}, \quad (3)$$

де U_{ri}, U_{vi} – пружні переміщення від тиску $q_{ri}(\rho)$, що діють в зоні W_{ri} , і від тиску $q_v(\rho)$, що діє у зоні W_{vi} .

Елементарні переміщення dU_{ri} і dU_{vi} від тисків q_{ri} і q_{vi} , що діють на елементарних ділянках dw_{ri} і dw_{vi} , відповідно визначаються виразами [2].

$$dU_{ri} = -\frac{\theta q_{ri}(\rho_{ri})}{\pi R_1^2} dw_{ri}, \quad dU_{vi} = -\frac{\theta q_{ri}(\rho_{vi})}{\pi R_2^2} dw_{vi}, \quad (4)$$

де $R_1^2 = \rho^2 + \rho_{ri}^2 - 2\rho\rho_{ri}\cos\varphi_{ri}$; $R_2^2 = \rho^2 + \rho_{vi}^2 - 2\rho\rho_{vi}\cos\varphi_{vi}$; $dw_{ri} = \rho_{ri} \cdot d\rho_{ri} d\varphi_{ri}$; $dw_{vi} = \rho_{vi} \cdot d\rho_{vi} d\varphi_{vi}$; θ – пружна стала матеріалу.

Інтегруючи вирази (4) для dU_{ri} і dU_{vi} за відповідними областями, одержимо

$$\left. \begin{aligned} U_{ri} &= -\frac{\theta}{\pi} \int_{W_{ri}} \frac{q_{ri}(\rho_{ri})}{R_{ri}} dw_{ri} \\ U_{vi} &= -\frac{4}{\pi} \theta q_c [a_1 E(\rho_{vi}/a_1) - a_{vi} E(\rho_{vi}/a_{vi})] \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

де $E(x)$ – повний еліптичний інтеграл 2-го роду.

Розглянемо контакт окремої нерівності з пружним напівпростором. Нехай дві точки A_1 і A_2 , що належать поверхням нерівності і напівпростору відповідно, торкаються між собою в точці A після прикладання навантаження (рисунок).

У такому разі

$$z_{ori}(\rho_i) = z_{ri}(\rho_i), \quad \rho_i = \overline{o, a_{ri}}. \quad (6)$$

З виразів (2), (3) і (6) виходить, що

$$z_i - z_{oi} - U_{vi} - U_o = U_{ri}, \quad \rho_i = \overline{o, a_{ri}}. \quad (7)$$

Підставляючи (1) і (5) в (7) і враховуючи, що для реальних умов навантаження $a_i \gg a_{vi}$, одержимо

$$\int_{W_{ri}} \frac{q_{ri}(\rho_{ri})}{R_{ri}} dw_{ri} = f(\rho), \quad (8)$$

де

$$f(\rho) = \frac{\pi}{\theta} \left(\frac{\rho^2}{r_i} - uR_{\max} - U_o \right) - 2\pi q_c \left[a_1 - \frac{2}{\pi} a_{vi} E \left(\frac{\rho}{a_{vi}} \right) \right]. \quad (9)$$

Рівняння (8) є основним рівнянням осесиметричної контактної задачі теорії пружності і має такий розв'язок [3]:

$$q_{ri}(\rho) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\rho}^{a_{ri}} \frac{F'(S) dS}{\sqrt{S^2 - \rho^2}}, \quad (10)$$

$$N_i = -\frac{2}{\pi} \int_0^{a_{vi}} \frac{f'(\sigma)\sigma^2 d\sigma}{\sqrt{a_r^2 - \sigma^2}}, \quad (11)$$

$$F(S) = \frac{2}{\pi} \left[f(0) + S \int_0^S \frac{f'(\sigma) d\sigma}{\sqrt{S^2 - \sigma^2}} \right]. \quad (12)$$

З виразів (9), (12) одержимо

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= 2\pi q_c (a_{vi} - a_l) - \frac{\pi}{\theta} (U_0 + uR_{\max}), \\ f'(\sigma) &= 4q_c \frac{a_{vi}}{\sigma} \left[E\left(\frac{\sigma}{a_{vi}}\right) - K\left(\frac{\sigma}{a_{vi}}\right) \right] - \frac{2\pi}{\theta} \cdot \frac{\sigma}{r_i}, \\ F(S) &= 4q_c \left(\frac{a_{ci}}{\sqrt{k_q}} - a_l \right) - \frac{2}{\theta} (U_0 + uR_{\max}) - \frac{2S^2}{\theta} \frac{1}{r_i} - \frac{4cS^2}{a_{vi} + \sqrt{a_{vi}^2 - S^2}}, \\ F'(S) &= -\frac{4S}{\theta r_i} - \frac{8q_c S}{a_{ci} + \sqrt{a_{ci}^2 - S^2}} - \frac{4q_c S^3}{\sqrt{a_{ci}^2 - S^2} (a_{ci} + \sqrt{a_{ci}^2 - S^2})} \end{aligned} \right\}, \quad (13)$$

де $K(x)$ – повний еліптичний інтеграл I-го роду; k_q – коефіцієнт нерівномірності середнього тиску $k_q = \frac{q_c}{q_{ci}}$, $a_{vi} = \frac{a_{ci}}{\sqrt{k_q}}$.

Підставляючи (13) в (10) і (11), одержимо

$$q_{ri} \left(\frac{\eta_p}{\eta_i} \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{a_{ci}}{\theta r_i} \sqrt{\eta_i - \eta_p} + \frac{2}{\pi} q_c \arccos \sqrt{\frac{1 - \eta_i k_q}{1 - \eta_p k_q}}, \quad \eta_p \leq \eta_i; \quad (14)$$

$$q_{ci} = \frac{N_i}{A_{ci}} = \frac{4\eta_i^{3/2} a_{ci}}{3\pi \theta r_i} + \frac{2q_{ci}}{\pi \eta_i} \left[\arcsin \sqrt{\eta_i k_q} - \sqrt{\eta_i k_q (1 - \eta_i k_q)} \right]. \quad (15)$$

Середнє q_{mi} і максимальне q_{roi} напруження на плямі контакту

$$q_{mi} = \frac{N_i}{A_{ri}} = \frac{4\eta_i^{1/2} a_{ci}}{3\pi \theta r_i} + \frac{2q_{ci}}{\pi \eta_i^2} \left[\arcsin \sqrt{\eta_i k_q} - \sqrt{\eta_i k_q (1 - \eta_i k_q)} \right]; \quad (16)$$

$$q_{roi} = \frac{2\eta_i^{1/2} a_{ci}}{\pi \theta r_i} + \frac{2}{\pi} q_c \arccos \sqrt{1 - \eta_i k_q}. \quad (17)$$

Переміщення U_0 визначаються з умови обмеженості контактних тисків на межах плями контакту, тобто $F(a_{ri}) = 0$. Тоді з рівняння (13) матимемо

$$U_0 = 2q_c \theta \left(\frac{a_{ci}}{\sqrt{k_q}} - a_1 \right) - uR_{\max} . \quad (18)$$

Запропонована математична модель контактування нерівності шорсткого шару полімерної поверхні враховує взаємний вплив мікронерівностей, а також об'ємну деформацію матеріалу, що дає можливість підвищити точність визначення характеристик зони контакту.

1. Lee E. H., Radok J. R. M. *The contact problem for viscoelastic bodies.* – *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.*, 1960. – 27. – P. 438. 2. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. *Теория упругости.* – М., 1979. – 560 с. 3. Ли, Роджерс. *Нахождение вязкоупругих напряжений при помощи измеренных функций ползучести и релаксации // Прикладная механика: Тр. Амер. об-ва инженеро-механиков.* – М., 1963. – Т. 30, № 1. – С. 151–159.

УДК 536.2:539.377

Р.В. Лампіка

Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра “Електронне машинобудування”

ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ ОПРОМІНЮВАНОЇ ОБОЛОНКИ З ПОКРИТТЯМ

© Лампіка Р.В., 2002

Наведено рівняння теплопровідності опромінюваних оболонок з покриттям і заповнювачем. Проведено чисельні розрахунки температурного поля нескінченної циліндричної оболонки при опромінюванні.

In article is represented the heat conductivity equations for the irradiate shells with cover and stuff. Defining the warm-up field of endless cylindrical shell under radiation.

РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ОПРОМІНЮВАНИХ ОБОЛОНОК З ПОКРИТТЯМ І ЗАПОВНЮВАЧЕМ

Розглянемо оболонку з покриттям і заповнювачем, віднесена до триортогональної системи координатних ліній (α, β, γ) , що одночасно є відповідними лініями головних кривин серединної поверхні і нормаллю до неї.

За вихідні співвідношення для описання процесу теплопровідності в об'ємах, що їх займають матеріали оболонки і покриття, приймемо тривимірні рівняння теплопровідності при нестационарному нагріванні:

$$\lambda_i^\gamma \frac{\partial^2 t_i}{\partial \gamma_i^2} + 2\lambda_i^\gamma k_i \frac{\partial t_i}{\partial \gamma_i} + \nabla_i^2 t_i - C_i \frac{\partial t_i}{\partial \tau} + Q = 0; \quad (1)$$