

НЕЛІНІЙНІ ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ ПРУЖНОГО РУХОМОГО КАНАТА ЗА ЗБУРЮЮЧИХ КРАЙОВИХ УМОВ

© Сліпчук А.М., 2008

У моделі розглядаються поперечні коливання одновимірних пружних систем (каната, струни, линви), які рухаються уздовж своєї недеформованої осі з постійною швидкістю. Отримано диференціальне рівняння, яке описує динамічні процеси в зазначених одновимірних системах; запропоновано методику його дослідження. Вона дає змогу отримати залежності для визначення впливу фізико-механічних і кінематичних характеристик системи на амплітуду і частоту її коливань.

In model the cross fluctuations of one-measurable elastic systems (rope, string, tow) are considered(examined) which move along the not deformed axis with constant speed. The differential equation is received which is described dynamic processes in specified one-measurable by(with) system; is offered, for certain(determined) of the assumptions, technique of his(its) research, which permits to receive dependences, which define(determine) influence physico-mathematical and kinematic of the characteristics of system on its(her) amplitude and frequency of fluctuations.

Процеси, які виникають в одновимірних нелінійно-пружних системах з незмінними геометричними і фізико-механічними характеристиками, розглядали у випадку, якщо така система рухається уздовж своєї геометричної осі, але за однорідних крайових умов [1,2]. Однак багато практичних задач (підвісні канатні дороги, конвеєрні лінії, пристрої для витяжки і намотування дроту тощо) вимагають під час їх розв'язання уточнених підходів дослідження впливу руху на динаміку процесу. Динамічні процеси, у пружних рухомих одновимірних системах, описати математично уже значно важче. Крім того здебільшого під час розгляду вказаного типу задач не враховуються пружні властивості середовища, що призводять до видовження каната, збурюючих сил у точках дотику каната і опор, а також можливість переміщення кінців такої системи перпендикулярно до осі коливання [3]. Нижче розглядається складніша задача, яка поєднує вказані фактори: середовище рухається уздовж своєї осі з постійною швидкістю і враховується його лінійне подовження.

Постановка задачі. Вказані вище механічні системи вивчатимемо на прикладі однорідного пружного каната з постійним поперечним перерізом. Для того, щоб одержати диференціальне рівняння, що описує динамічні процеси в такому пружному одновимірному середовищі, введемо такі позначення:

F – площа поперечного перерізу каната; $S(x)$ – натяг каната в перерізі з координатою x ;
 m – маса одиниці довжини каната ; E – модуль пружності.

Виберемо нерухому систему координат xOy , початок якої збігається з лівим кінцем, а вісь Ox збігається з недеформованим його положенням (див. рис. 1).

Позначимо: $u(x, t)$ – переміщення перерізу каната з координатою x в довільний момент часу t в напрямку, перпендикулярному до осі Ox ; ΔS – додатковий натяг каната зумовлений подовженням ділянки довжиною dx ; Δdx – зміна довжини елемента каната при коливаннях

($\Delta dx = dx - dx \cos \chi \approx dx \frac{\chi^2}{2}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = u' \approx \chi$); $R\left(u, \frac{du}{dt}\right) dx$ – рівнодійну сил опору і інших

дисипативних сил, які діють на елемент каната довжиною dx . Відносна деформація $\frac{\Delta dx}{dx}$ по всій довжині каната також буде незмінною, адже величина натягу каната постійна, а загальне його подовження обчислюється за формулою

$$\Delta l = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (1)$$

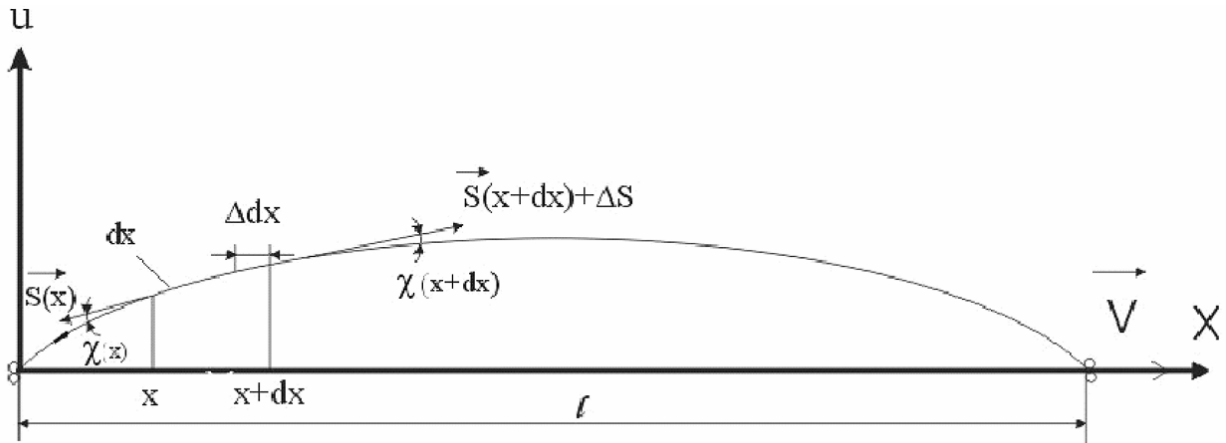


Рис. 1. Розрахункова модель і схема сил, що діють на елементарну довжину струни

Додатковий натяг каната, зумовлений його подовженням, дорівнює

$$\Delta S = \frac{EF}{2l} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (2)$$

використовуючи для умовно виділеного елемента довжиною dx принцип Даламбера в проекції на вісь Ox , одержимо

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = (S + \Delta S) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - R\left(u, \frac{du}{dt}\right), \quad (3)$$

де $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x+dx} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x}$.

Для випадку струни, яка рухається уздовж осі Ox з сталою швидкістю, символи першої $\frac{d}{dt}$ і

другої похідної за часом $\frac{d^2}{dt^2}$ визначаються залежностями

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} = V \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}, \\ \frac{d^2}{dt^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 2 \frac{dx}{dt} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2V \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

де V – горизонтальна швидкість руху каната.

Підставляючи (1), (2), (4) у диференціальне рівняння (3), одержуємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{EF}{2ml} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - V^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2V \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{1}{m} R \left(u, \frac{du}{dt} \right), \quad (5)$$

де $\alpha^2 = \frac{S}{m}$.

Отже, динамічні процеси у пружному канаті, який рухається вздовж своєї геометричної осі із сталою швидкістю, описуються диференціальним рівнянням (5).

Методика дослідження. Для вивчення впливу додаткового подовження, а також руху каната на амплітудно-частотну характеристику його коливань будемо вважати:

а) у точках А і В відбувається переміщення каната у напрямку осі Оу, а це означає, що для диференціального рівняння (5) існують крайові умови

$$M_{1j} \left(u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0,l} = \varepsilon \eta_j \left(\tau, \theta, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0,l} \quad M_{2j} \left(u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0,l} = \varepsilon \mu_j (\tau, \theta, u) \Big|_{x=0,l}, \quad (6)$$

при $x = j$, де M_{ij} ($i = 1, 2; j = 0, l$) – деяка лінійна однорідна функція, а права частина (6) – 2π -періодична по θ і розкладається в ряд по степенях малого параметра ε . Крайові умови (6) відповідають деяким практичним випадкам кріплення кінців каната і включають в себе випадок пружного закріплення з нелінійною характеристикою і заданим зміщенням його у часі.

Нелінійне диференціальне рівняння (5) разом з чотирма слабко нелінійними крайовими умовами (6) становлять одновимірну нелінійну крайову задачу неавтономного типу за наявності в коливній системі малих збурень нестационарного характеру. При тому повинні виконуватися такі вимоги:

а) початкові умови, які відповідають поставленій задачі задовольняють умови існування коливного процесу, близького до однієї із форм незбуреної системи;

б) величина додаткового натягу каната зумовлена його видовженням є малою порівняно із початковим натягом на його кінцях (це дозволяє стверджувати, що $\Delta S \ll S$, а отже, $\alpha^2 \gg \frac{EF}{2ml}$);

в) сили опору та дисипативні сили є малими порівняно із натягом каната;

г) швидкість переміщення каната вздовж осі ОХ є незначною: $V \ll \alpha$.

Насамперед розглянемо розв'язок рівняння (1), коли $\varepsilon = 0$ у випадку малої швидкості руху середовища. Згідно із асимптотичними методами нелінійної механіки [4] розв'язок шукатимемо у вигляді:

$$u_{0n}(x, t) = a_n X_n(x) \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (7)$$

де a_n – амплітудний параметр; ω_n – власна частота, φ_n – довільна стала, $X_n(x)$ – фундаментальні функції, які мають властивості ортонормованості. Для випадку головних коливань за незбурених крайових умов, які відповідають (6) будуть подані так:

$$X(x) = \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (8)$$

Розв'язок “збуреної” крайової задачі, для випадку головного резонансу, шукатимемо у вигляді асимптотичного розкладу

$$u(x, t) = a(t) X_1(x) \cos(\psi) + \varepsilon u_1(x, a, \psi, \theta). \quad (9)$$

Нерезонансний випадок. На відміну від лінійного випадку, у нелінійному, параметри a і ψ ($\psi = \omega t + \varphi$) (9) будуть змінні і залежать від нелінійних, періодичних сил, а також руху

середовища. Закони зміни останніх у рівнянні (9), як і [6] задаватимемо диференціальними рівняннями :

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots \quad (10)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots$$

причому $A_i(a)$ і $B_i(a)$ ($i=1,2,\dots$) – знаходяться так, щоб зображення (9) задовольняло вихідну задачу (6) з необхідним ступенем точності.

Для першого наближення розв'язку рівняння необхідно знайти функції $A_1(a), B_1(a)$ та $u_1(x, a, \psi, \theta)$. Диференціюванням залежності (10), врахувавши (9), отримаємо для першого наближення:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \varepsilon A_1(a) \sin \frac{k\pi}{l} x \cos \psi - a \sin \frac{k\pi}{l} x (\sin \psi (\omega + \varepsilon B_1(a))) + \frac{\partial u_1}{\partial \psi} (\omega + \varepsilon B_1(a)) + \\ &+ v \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -a \omega^2 \sin \frac{k\pi}{l} x \cos \psi - 2\varepsilon a A_1(a) \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \psi - 2a B_1(a) \omega \sin \frac{k\pi}{l} x \cos \psi + \\ &+ \varepsilon \omega^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + v^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + 2\omega v \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi \partial \theta} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{k\pi}{l} a \cos \frac{k\pi}{l} x \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 a \sin \frac{k\pi}{l} x \cos \psi + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (13)$$

Ці співвідношення дають змогу отримати вже лінійне диференціальне рівняння, яке зв'язує шукані функції $u_1(x, a, \psi, \theta)$, $A_1(a)$, $B_1(a)$.

Підставляючи розв'язок (9) і крайових умов (6) у рівняння (5), з врахуванням рівняння (11)–(13), прирівнюванням (для однакових степенів), в лівій та правій частинах рівняння. Отримаємо крайову задачу для лінійної функції $u_1(x, a, \psi, \theta)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} \omega^2 + 2v \omega \frac{\partial u_1}{\partial \psi \partial \theta} + v^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} &= 2a \omega A_1(a) \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \psi + 2\omega a B_1(a) \sin \frac{k\pi}{l} x \cos \psi + \\ &+ \left(\frac{EF}{2ml} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - V^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2V \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{1}{m} R \left(u, \frac{du}{dt} \right) + \bar{F}(x, a, \psi, \theta) \end{aligned} \quad (14)$$

При цьому крайові умови набуватимуть вигляду

$$M_{1j} \left(u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0,l} = \varepsilon \eta_j^{(0)}(x, a, \psi, \theta) \Big|_{x=0,l} \quad M_{2j} \left(u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0,l} = \varepsilon \mu_{2j}^{(0)}(x, a, \psi, \theta) \Big|_{x=0,l} \quad (15)$$

де

$$\eta = \eta_j \left(\sin \frac{k\pi}{l} x, a \cos \psi, \theta \right) \Big|_{x=0,l} \quad \mu = \mu_j \left(\sin \frac{k\pi}{l} x, a \cos \psi, \theta \right) \Big|_{x=0,l} \quad (16)$$

Задовольняючи крайові умови (16) зображенням розв'язку у вигляді суми

$$u_1(x, a, \theta, \psi) = \mathcal{G}_1(x, a, \theta, \psi) + \xi_1(x, a, \theta, \psi), \quad (17)$$

де допоміжна функція $\xi_1(x, a, \theta, \psi)$ є розв'язком рівняння $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$. За вказаного вибору

$\xi_1(x, a, \psi, \theta)$ крайові умови відносно $\mathcal{G}_1(x, a, \psi, \theta)$ приймають вигляд

$$M_{1j} \left(\mathcal{G}, \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=j} = 0 \quad M_{2j} \left(\mathcal{G}, \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=j} = 0 \quad (j = 0, l) \quad (18)$$

звідси можемо знайти $\xi = c_1 x + c_2$. При цьому коефіцієнти $c_{1,2}$ визначаються з крайових умов (18), зокрема для практичного випадку коли один кінець нерухомо закріплений, а другий кінець вібрує і на нього діє сила. Вона набуває вигляду

$$u(x, t) \Big|_{x=0} = u_x(x, t) \Big|_{x=0} = 0, \quad u(x, t) \Big|_{x=l} = Ru(x, t) + R_1 \sin \theta, \quad u_x(x, t) \Big|_{x=l} = R_3 u(x, t). \quad (19)$$

Шукана функція ξ буде дорівнювати

$$\xi = (Ru + R_1 \sin \theta)x + R_3 u \quad (20)$$

Нова функція $\mathcal{G}(x, a, \psi, \theta)$ визначається при цьому із диференціального рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{G}_1}{\partial \psi^2} \omega^2 + 2\nu \omega \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial \psi \partial \theta} + \nu^2 \frac{\partial^2 \mathcal{G}_1}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \mathcal{G}_1}{\partial x^2} = 2a\omega A_1(a) \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \psi + 2\omega a B_1(a) \sin \frac{k\pi}{l} x \cos \psi + \\ + \left(\frac{EF}{2ml} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - V^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2V \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{1}{m} R \left(u, \frac{du}{dt} \right) + F^*(a, \psi, x, \theta..), \end{aligned} \quad (21)$$

де $F^* = F(x, a, \psi, \theta) - \frac{\partial^2 \xi}{\partial \psi^2} \omega^2 - 2\nu \omega \frac{\partial^2 \xi}{\partial \psi \partial \theta} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} \nu^2$.

Отже, функція $\mathcal{G}(x, a, \psi, \theta)$ визначається із лінійного неоднорідного рівняння (21) і однорідних крайових умов. Цю функцію шукатимемо у вигляді ряду

$$\mathcal{G}(x, a, \psi, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n(a, \psi, \theta) X_n(x). \quad (22)$$

Для однозначного визначення невідомих функцій $A_1(a)$ і $B_1(a)$ накладемо на $u_1(x, a, \psi, \theta)$, як і в [5], додаткову умову – умову відсутності у її розкладі доданків, пропорційних $\sin \frac{k\pi}{l} x \cos \psi$ і $\sin \frac{k\pi}{l} \sin \psi$. Це дозволяє отримати вирази для функції, які визначають закон зміни амплітуди і фази у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega m} \int_0^{2\pi} f_0(\alpha \cos \psi - \alpha \omega \sin \psi) \sin \psi d\psi \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega - \frac{\varepsilon}{2\pi\omega m} \int_0^{2\pi} f_0(\alpha \cos \psi - \alpha \omega \sin \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \quad (23)$$

Для знаходження першого покращеного наближення розв'язку, тобто знаходження функції $u_1(x, a, \psi, \theta)$, подаючи її у вигляді рядів Фур'є. Комплексно-експоненційна форма кратного ряду Фур'є доволі зручна для розрахунків. Ця форма еквівалентна звичайній формі розкладу по синусу та косинусу, так що умови збіжності будуть такі самі.

Значить у нерезонансному випадку АФХ коливної системи залежатиме від: швидкості руху, величини гармонійної сили, яка діє на канат, та амплітуди a .

Резонансний випадок. Тепер розглянемо таку саму систему, тільки для головного резонансного випадку ($\omega = \nu$). Як і в нерезонансному випадку розв'язок можна шукати у вигляді (6). На відміну від нерезонансного випадку, у резонансному АЧХ процесу істотно залежить від різниці фаз власних і вимушених коливань. Тому подамо $\frac{d\varphi}{dt}$ і $\frac{da}{dt}$, як функції не тільки від a , а і від

$\varphi = \psi - \theta$ тобто

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a, \varphi) + \varepsilon^2 A_2(a, \varphi) + \dots \quad (24)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega - \nu + \varepsilon B_1(a, \varphi) + \varepsilon^2 B_2(a, \varphi) + \dots$$

Задача у першому наближенні полягає у визначенні $A_1(a, \varphi)$, $B_1(a, \varphi)$ та $u_1(x, \theta)$. Для цього продиференціюємо (6) з врахуванням вказаного вище.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & \varepsilon A_1(a, \varphi) \sin \frac{k\pi}{l} x \cos \psi - a \sin \frac{k\pi}{l} x (\sin \psi (\omega - \nu + \varepsilon B_1(a, \varphi))) + \\ & + \frac{\partial u_1}{\partial \psi} (\omega - \nu + \varepsilon B_1(a, \varphi)) + \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \nu \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = & \left(\varepsilon \nu \frac{\partial A(a, \varphi)}{\partial \varphi} - a (\omega + \varepsilon B_1(a, \varphi))^2 \right) \sin \frac{k\pi}{l} x \cos \psi - \\ & - \left(a \varepsilon \frac{\partial B_1(a, \varphi)}{\partial \varphi} (\omega - \nu) + \varepsilon A_1(a, \varphi) (\omega - \nu + \varepsilon B_1(a, \varphi)) \right) \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \psi + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} \nu^2 + 2\omega \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi \partial \nu} \end{aligned} \quad (26)$$

Отож, прирівнюючи коефіцієнти при ε , отримаємо крайові задачі для $u_1(x, a, \psi, \theta)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} \omega^2 + 2 \frac{\partial u_1}{\partial \psi \partial \theta} \nu \omega + \nu^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = & a V^2 \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{k\pi}{l} \cos \psi - \\ & - 2V \frac{k\pi}{l} \cos \frac{k\pi}{l} \cos \psi + F^*(x, a, \psi, \theta) + \\ & + \varepsilon \sin \frac{k\pi}{l} x \left(\cos \psi \left(- \frac{\partial A(a, \varphi)}{\partial \varphi} (\omega - \nu) + 2a\omega B \right) + \sin \psi \left(a \frac{\partial B(a, \varphi)}{\partial \varphi} (\omega - \nu) + 2A\omega \right) \right) \end{aligned} \quad (27)$$

Далі використовуючи вказаний метод, знайдемо розв'язок у вигляді ряду

$$u_1(x, a, \psi, \theta) = \sum X_m(x) u_{1m}(a, \theta, \psi) \quad (28)$$

Крайові умови (15) та підставляючи заміну (17), за такого зображення виключаються автоматично. Для випадку $m=1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{G}_{11}}{\partial \psi^2} \omega^2 + 2 \frac{\partial \mathcal{G}_{11}}{\partial \psi \partial \theta} \nu \omega + \nu^2 \frac{\partial^2 \mathcal{G}_{11}}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{\partial^2 \mathcal{G}_{11}}{\partial x^2} = & a V^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{k\pi}{l} \cos \psi + \\ & + \frac{1}{p_0} \int_0^l F^*(a, x, \theta, \psi) X_1(x) dx + \\ & + \left(\cos \psi \left(- \frac{\partial A(a, \varphi)}{\partial \varphi} (\omega - \nu) + 2a\omega B \right) + \sin \psi \left(a \frac{\partial B(a, \varphi)}{\partial \varphi} (\omega - \nu) + 2A\omega \right) \right) \end{aligned} \quad (29)$$

Для випадку $m \neq 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{G}_m}{\partial \psi^2} \omega^2 + 2 \frac{\partial \mathcal{G}_m}{\partial \psi \partial \theta} \nu \omega + \nu^2 \frac{\partial^2 \mathcal{G}_m}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \mathcal{G}_m = a V^2 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{m\pi}{l} \cos \psi + \\ + \frac{1}{P} \int_0^l F^*(a, x, \theta, \psi) X_m(x) dx \end{aligned} \quad (30)$$

Розв'язок отриманих рівнянь будемо шукати у вигляді рядів Фур'є. Комплексно-експоненційна форма кратного ряду Фур'є доволі зручна для розрахунків. Ця форма еквівалентна звичайній формі розкладу по синусу та косинусу, так що умови збіжності будуть такі самі. Тому функцію $\mathcal{G}_{1k}(a, \psi, \theta)$ подамо у вигляді

$$\mathcal{G}_{1k} = \sum \mathcal{G}_{1kpr}(a) e^{i(p(\varphi+\theta)+r\theta)} \quad (31)$$

Накладаючи на функцію $\mathcal{G}_{1k}(a, \psi, \theta)$ умови, аналогічні до нерезонансного випадку, отримаємо для випадку поголового резонансу

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega m} \int_0^{2\pi} f_0(\alpha \cos \psi - \alpha \omega \sin \psi) \sin \psi d\psi - \frac{\varepsilon F_0}{m(\omega + \nu)} \cos \nu \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega - \nu - \frac{\varepsilon}{2\pi\omega \alpha m} \int_0^{2\pi} f_0(\alpha \cos \psi - \alpha \omega \sin \psi) \cos \psi d\psi - \frac{\varepsilon F_0}{m\alpha(\omega + \nu)} \sin \nu \end{aligned} \quad (32)$$

Отже, одночастотні коливання каната описуються залежністю (7), в якій α і ψ визначаються диференціальним рівнянням (8) і (9) для різних випадків.

Розглянемо вплив лише додаткового видовження, руху та вимушувальної сили на АФХ колювальної системи із збуреними крайовими умовами. Тоді, як впливає із (8) і (9), АФХ власних коливань каната визначається залежністю:

а) у нерезонансному випадку:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} = 0 \\ \frac{d\psi}{dt} = \omega - \frac{\varepsilon(\gamma^2 \pi^2)}{2\omega m l^2} - \frac{3\varepsilon\beta\pi^4 \alpha^2}{8\omega m l^4} + \frac{3}{8\omega\pi} ((R + R_1 \sin \theta)l + R_3 l) \\ \omega = \frac{k\pi}{l} \alpha \end{aligned} \quad (33)$$

б) у резонансному випадку:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\varepsilon F_0}{m(\nu + \omega)} \cos \nu \\ \frac{d\varphi}{dt} = \omega - \nu - \frac{\varepsilon(\gamma^2 \pi^2)}{2\omega m l^2} - \frac{3\varepsilon\beta\pi^4 \alpha^2}{8\omega m l^4} + \frac{3}{8\omega\pi} ((R + R_1 \sin \theta)l + R_3 l) + \frac{\varepsilon F_0}{m\alpha(\omega + \nu)} \sin \nu \end{aligned} \quad (34)$$

Висновки. як і варто було очікувати, амплітуда коливань система у резонансному випадку залежить як від величини сили, так і від її частоти. Крім того, є залежність від швидкості руху (параметру γ) та від амплітуди (початкових умов).

Нижче графічно показано декілька залежностей частоти коливання від різних параметрів, а також зміну амплітуди у резонансному випадку.

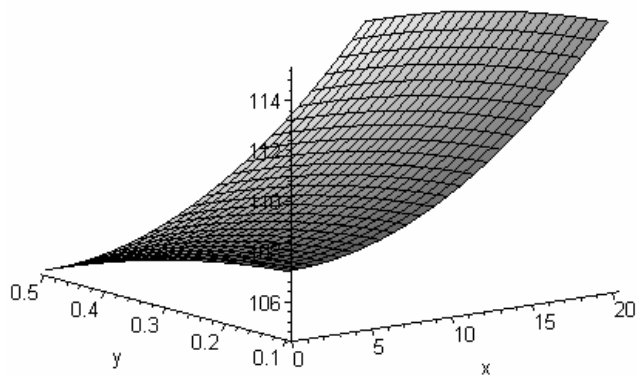


Рис. 2. Залежність частоти власних коливань каната від початкової амплітуди (y) та швидкості (x)

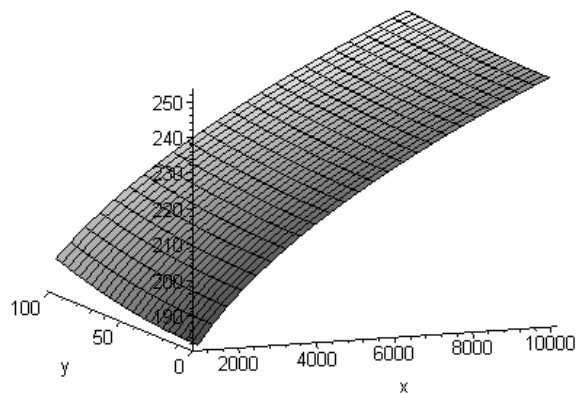


Рис. 3 Залежність частоти власних коливань каната від натягу (x) та швидкості (y)

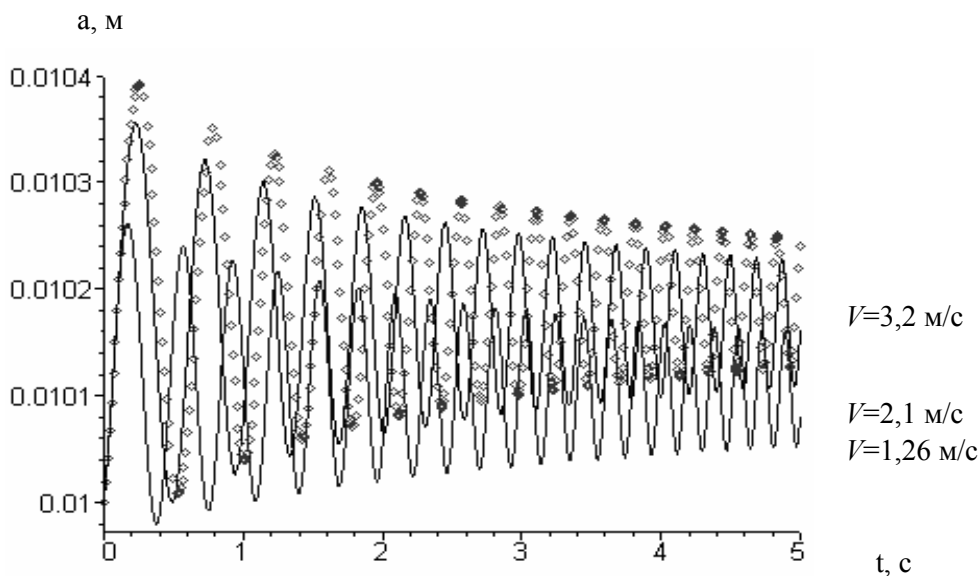


Рис. 4 Залежність амплітуди власних коливань каната за різних швидкостей

На основі отриманих аналітичних і графічних залежностей впливає:

по-перше: врахування видовження каната призводить до того, що розрахункова частота його власних коливань стає більшою на 15 % порівняно із власною частотою за незбурюючих крайових умов;

по-друге: якщо у лінійній постановці частота (період) коливань каната залежить лише від його початкового натягу і густини, то у нелінійній як від фізико-механічних властивостей матеріалу каната, так і амплітуди коливань, причому із збільшенням початкової амплітуди коливань частота збільшується;

по-третє: що стосується швидкості руху каната, то вона у розглядуваній постановці задачі впливає менше на частоту власних коливань, ніж початкова амплітуда.

1. Найфэ А.Х. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 456 с. 2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с. 3. Гацук П., Зорій Л. Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем. – Львів: Українська технології, 1999. – 372 с. 4. Митропольский Ю.А., Мосеєнков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Вища шк., 1976. – 592 с.