

Рис. 3. Граф в ярусно-паралельній формі

Аналізуючи роботу цього процесу можемо зробити висновок, що перетворення графів у ярусно-паралельну форму на основі матриць інциденцій сприяє визначенню послідовності моделювання роботи компонентів схеми.

1. Мельник А.А. Процессоры обработки сигналов / Препринт 29-89. Ин-т прикл. проблем механики и математики. Львов, 1989. 2. Оре О. Графы и их применение. М., 1983. 3. Берж К. Теория графов и ее применение. М., 1962. 4. Поспелов Д.А. Логические методы анализа и синтеза схем. М., 1974. 5. Дунець Р.Б. Визначення послідовності моделювання аналогових елементів в системах автоматичного керування.// Інформаційні технології та розпізнавання образів. Т. 3, Ч. 2.- Львів- Харків- Тернопіль, 1993. -С.111-116. 6. Дунець Р., Дунець Б. Алгоритм перетворення графів в ярусно- паралельну форму на основі операцій алгебри логіки.// Поліграфія і видавнича справа. 1997. №33. С.17-24.

УДК 519.685:519.63

О.І. Наумко, Я.Г. Савула
Національний університет ім. Ів. Франка

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ОБЛАСТІ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ УСТАЛЕНОЇ НАПРНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ

© О.І. Наумко, Я.Г. Савула, 2000

Розв'язання ДРЧП для поля потенціалу фільтрації під гідротехнічними спорудами має велике значення в інженерній практиці. Коли область фільтрації містить тонкі включення (прошарки) інших матеріалів, постають труднощі числового аналізу. У статті для подолання цих труднощів пропонуються методи декомпозиції області. Наведені числові результати (таблиці і графіки) розв'язання модельної двовимірної задачі.

Solving PDEs for filtration potential field under hydrotechnical installations is of great importance in engineering practice. When filtration region contains fine inclusions (layers) of different materials the difficulties with numerical analysis arise. In the article domain decomposition methods are applied in order to overcome the difficulties. Presented are numerical results (tables and graphs) of solving model 2D problem.

Розрахунок потенціалу фільтрації під гідротехнічними спорудами має значення під час їх проектування, а також забезпечення надійної експлуатації. Побудові відповідної математичної моделі та розв'язанню цієї задачі присвячені роботи [1,3,4,5,6].

Типовою є ситуація, коли в середовищі фільтрації з коефіцієнтом проникності K_0 трапляються тонкі прошарки зі значно відмінним коефіцієнтом проникності K_1 , наявність яких суттєво впливає на розподіл потенціалу фільтрації. Числове дослідження таких задач сітковими методами, незважаючи на постійне зростання потужностей обчислювальної техніки, має значні труднощі. Вони пов'язані з необхідністю побудови в області тонкого прошарку сіток, характерні розміри яких співвимірні з його малою товщиною. Для подолання цих труднощів запропоновані такі підходи:

- побудова нерівномірної сітки зі згущенням в області тонкого прошарку (що в загальному випадку є нетривіальним, а часто й неможливим завданням);
- заміна тонкого прошарку лінією, на якій будується розривний розв'язок і задаються т.зв. неоднорідні умови спряження неідеального контакту [7].

У цій роботі для подолання проблем числового аналізу задачі фільтрації в середовищі з тонкими включеннями пропонується використовувати метод декомпозиції області (МДО) [8,11] в поєднанні з методом скінченних елементів (МСЕ). Це дає можливість будувати розв'язок на послідовності сіток, які враховують особливості тонкого включення і області.

Розглянемо задачу про усталену напірну фільтрацію під водонепроникною греблею. Як відзначають автори монографії [7], основне завдання усталеної напірної фільтрації під дією різниці напорів у верхньому та нижньому б'єфах полягає у визначенні таких характеристик: фільтраційного тиску на непроникну підшову греблі, швидкості фільтрації в області і витрати рідини з верхньої водойми.

Оскільки довжина гребель, як правило, значно перевищує їхню ширину, то замість тривимірної задачі звичайно розглядають двовимірну задачу фільтрації в поперечному перетині

$$\begin{cases} -\nabla(K(x,y)\nabla h)=0 & \text{в } \Omega, \\ h|_{\Gamma_1}=H_1, \\ h|_{\Gamma_3}=H_2, \\ K\frac{\partial h}{\partial \vec{v}}|_{\Gamma_2,\Gamma_4}=0. \end{cases} \quad (1)$$

Тут Ω – область фільтрації (рис.1), обмежена границями $\Gamma_i, i = \overline{1,4}$ (Γ_1, Γ_3 – лінії контакту з верхнім та нижнім б'єфами; Γ_2, Γ_4 – водонепроникні підшови греблі та скельна основа), h – п'єзометричний напір, який виступає як фільтраційний потенціал, \vec{v} – зовнішня нормаль до границі області Ω , H_1 і H_2 – рівні води у верхньому та нижньому б'єфах ($H_1 > H_2$), K – коефіцієнт проникності середовища.

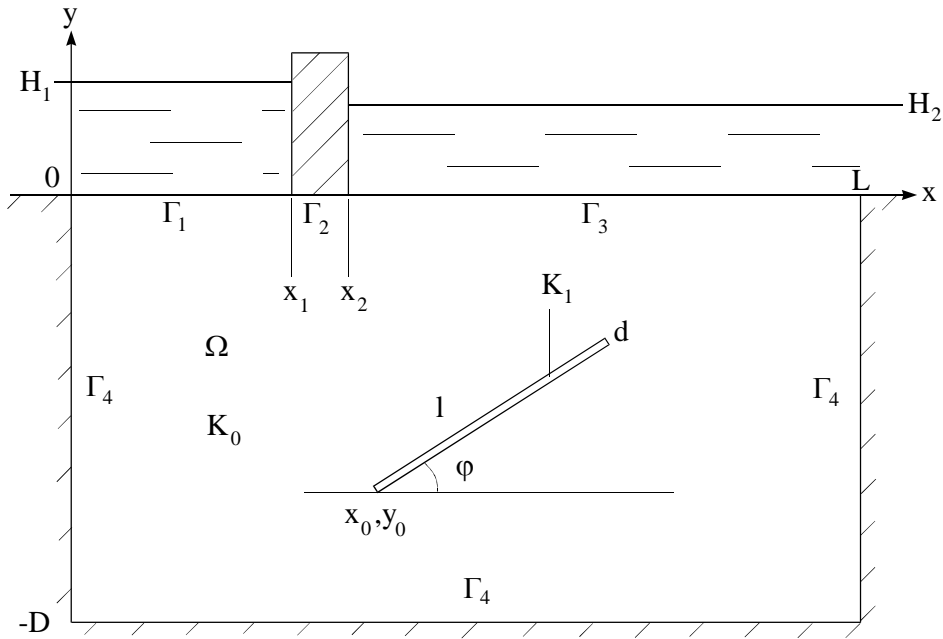


Рис. 1. Область фільтрації і параметри, що її описують

На границях Γ_1 і Γ_3 задаються неоднорідні граничні умови першого роду – постійні значення напору води відповідно у верхньому та нижньому б'єфах. На границях Γ_2 і Γ_4 задається однорідна гранична умова другого роду – відсутність протікання рідини.

Геометрія області Ω і її границь описується параметрами D, L, x_1, x_2 (рис.1).

В області Ω з коефіцієнтом проникності K_0 міститься тонке включення з коефіцієнтом проникності K_1 ($K_1 \ll K_0$), розміщення і орієнтація якого описується параметрами x_0, y_0, l, d, φ (рис.1).

Використаємо в цій роботі для числового аналізу задачі метод декомпозиції області, який є варіантом методу Шварца з перекриттям підобластей, – альтернуючий метод Шварца (АМШ) [11].

Область Ω задачі для застосування АМШ подамо як об'єднання двох підобластей з ненульовим перекриттям: $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ (рис.2).

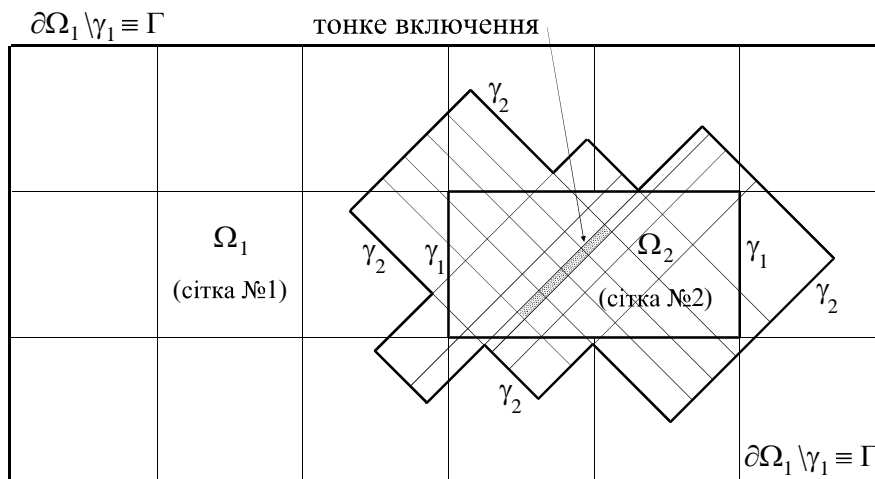


Рис. 2. Поділ області Ω на підобласті в АМШ

Поділ області Ω на підобласті для реалізації АМШ здійснювався так: одна сітка скінченних елементів (№ 1), рівновимірна, з великим кроком, будувалася в усій області Ω , після чого з неї вирізався блок скінченних елементів, який містив тонке включення (рис.2). Після цього друга сітка (№ 2) будувалася в області тонкого включення так, щоб забезпечити: а) порівнянні з включенням розміри СЕ; б) перекриття сіток; в) збільшення розмірів СЕ в ній у міру віддалення від включення – щоб уникнути надмірної кількості СЕ.

Границя $\partial\Omega_i$ підобласті Ω_i ($i = 1, 2$) складається з: а) γ_i – т. зв. штучної границі, тобто тієї частини $\partial\Omega_i$, яка належить підобласті Ω_j ($j \neq i$); б) $\partial\Omega_i \setminus \gamma_i$ – частини границі задачі

$$(1) \Gamma = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i \text{ (рис.2). Особливістю задачі є те, що } \partial\Omega_2 \setminus \gamma_2 \equiv \emptyset, \partial\Omega_1 \setminus \gamma_1 \equiv \Gamma.$$

Нехай h_i^n позначає наближений розв'язок на Ω_i після n ітерацій. Якщо за початкове наближення в АМШ вибрати h_2^0 в Ω_2 , то n -та ітерація АМШ складається з двох підкроків

$$\begin{cases} -\nabla(K(x, y)\nabla h_1^n) = 0 & \text{в } \Omega_1, \\ h_1^n = H(x, y) & \text{на } \partial\Omega_1 \setminus \gamma_1, \\ h_1^n = h_2^{n-1} |_{\gamma_1} & \text{на } \gamma_1, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} -\nabla(K(x, y)\nabla h_2^n) = 0 & \text{в } \Omega_2, \\ h_2^n = H(x, y) & \text{на } \partial\Omega_2 \setminus \gamma_2, \\ h_2^n = h_1^n |_{\gamma_2} & \text{на } \gamma_2, \end{cases} \quad (3)$$

на кожному з яких розв'язується еліптична задача в Ω_i ($i = 1, 2$) з граничним значенням H на $\partial\Omega_i \setminus \gamma_i$ і найновішим значенням наближеного розв'язку на штучній границі γ_i .

Початкове наближення на штучних границях авторами вибиралося нульовим: $h_i^0 |_{\gamma_j} \equiv 0$.

Зауважимо, що на другому підкроці АМШ використовується значення h_1^n , вже оновлене на першому підкроці тієї самої ітерації. Це т.зв. ітераційний процес АМШ за Гауссом-Зейделем. Можливим є й ітераційний процес АМШ за Якобі, коли на другому підкроці використовується значення h_1^{n-1} з попередньої ітерації: $h_2^n = h_1^{n-1} |_{\gamma_2}$ на γ_2 [11].

Для дискретизації граничних задач (2) і (3) в роботі було використано МСЕ з чотирикутними ізопараметричними СЕ з білінійними і біквадратичними апроксимаціями. Програмну реалізацію алгоритму АМШ було здійснено на базі вільно доступного через Інтернет пакета об'єктно-орієнтованих числових методів Diffpack [9,10], що дає змогу сконцентруватися на творчих аспектах організації ітераційного процесу АМШ, розбиття області, формулювання та розв'язання конкретних задач, не надто заглиблюючись в технічні деталі реалізації МСЕ.

Авторами з-поміж різних критеріїв досягнення збіжності АМШ був вибраний такий:

$$\max_i \frac{\|w_i^{n+1} - w_i^n\|}{\|w_i^{n+1}\|} < \epsilon, \quad (4)$$

де w_i^k – вектор вузлових значень на i -й штучній границі після k -ї ітерації, $\|\cdot\|$ – середньоквадратична норма вектора в \mathfrak{R}^N . Типовим значенням відносної похибки було вибрано $E = 10^{-5}$.

Знаючи поле напору (а отже, й швидкості руху рідини) біля границі Γ_1 (контакт з верхнім б'єфом), потік води, що входить в Ω через Γ_1 , можна визначити за формулою

$$Q_i = \int_{\Gamma_1} \vec{v} \cdot \vec{v} dS . \quad (5)$$

З врахуванням того, що швидкість \vec{v} визначається з закону Дарсі

$$\vec{v} = -\frac{K(x, y) \rho g}{\mu} \nabla h , \quad (6)$$

де $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 1,005 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$ – густина і в'язкість води, $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ – прискорення вільного падіння, отримуємо остаточну формулу

$$Q_i = -\frac{\rho g}{\mu} \int_{\Gamma_1} K(x, y) (\nabla h \cdot \vec{v}) dS . \quad (7)$$

Аналогічно потік, що виходить з Ω через Γ_3 , визначається за формулою

$$Q_o = -\frac{\rho g}{\mu} \int_{\Gamma_3} K(x, y) (\nabla h \cdot \vec{v}) dS . \quad (8)$$

Оскільки в (7) і (8) \vec{v} – зовнішня нормаль до Γ_1 (чи Γ_3) і $H_1 > H_2$, то $Q_i < 0, Q_o > 0$. Як результат закону збереження маси вхідний і вихідний потоки мають бути однаковими за модулем. У числових розрахунках ця рівність виконується лише наближено $Q_i \cong -Q_o$.

Покладемо в нашій задачі такі значення коефіцієнтів проникності [2]: $K_0 = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2$ (грунт), $K_1 = 10^{-10} \text{ м}^2$ (пісковик) та параметрів, що описують геометрію задачі: $H_1=15, H_2=12, D=100, L=300, x_1=100, x_2=120$ (всі розміри - в метрах).

Спочатку для тестування методу розв'яжемо задачу з незмінними положенням та розмірами тонкого включення ($x_0=100, y_0=-55, l=50, d=0,5, \varphi = 0^\circ$) при різних ступенях подрібнення сіток СЕ.

На рис.3 за допомогою ізоліній візуалізовано отриманий розв'язок: (а) поле п'єзометричного напору $h(x, y)$; (б) поле швидкості руху рідини $|\vec{v}|$. Можна зауважити аномалії полів, зумовлені наявністю тонкого включення, положення якого позначене пунктирною лінією.

Табл. 1 містить значення $-Q_i$ та Q_o . Подрібнення сітки № 1 задається кількістю СЕ (квадратичних) в ній: $n_x \cdot n_y$. Подрібнення сітки № 2 задається кількістю СЕ (лінійних чи квадратичних) вздовж тонкого включення – n_l , та впоперек тонкого включення – n_d .

З результатів табл.1 можна зробити висновки: а) сітку №2 доцільно формувати з лінійних СЕ, оскільки це практично не відбивається на значеннях потоків (які розраховуються на сітці №1); б) щоб стверджувати про достовірність застосування методу, параметри подрібнення сіток треба вибрати такими: $n_d=1, n_l=20, n_x \cdot n_y = 90 \cdot 30$.

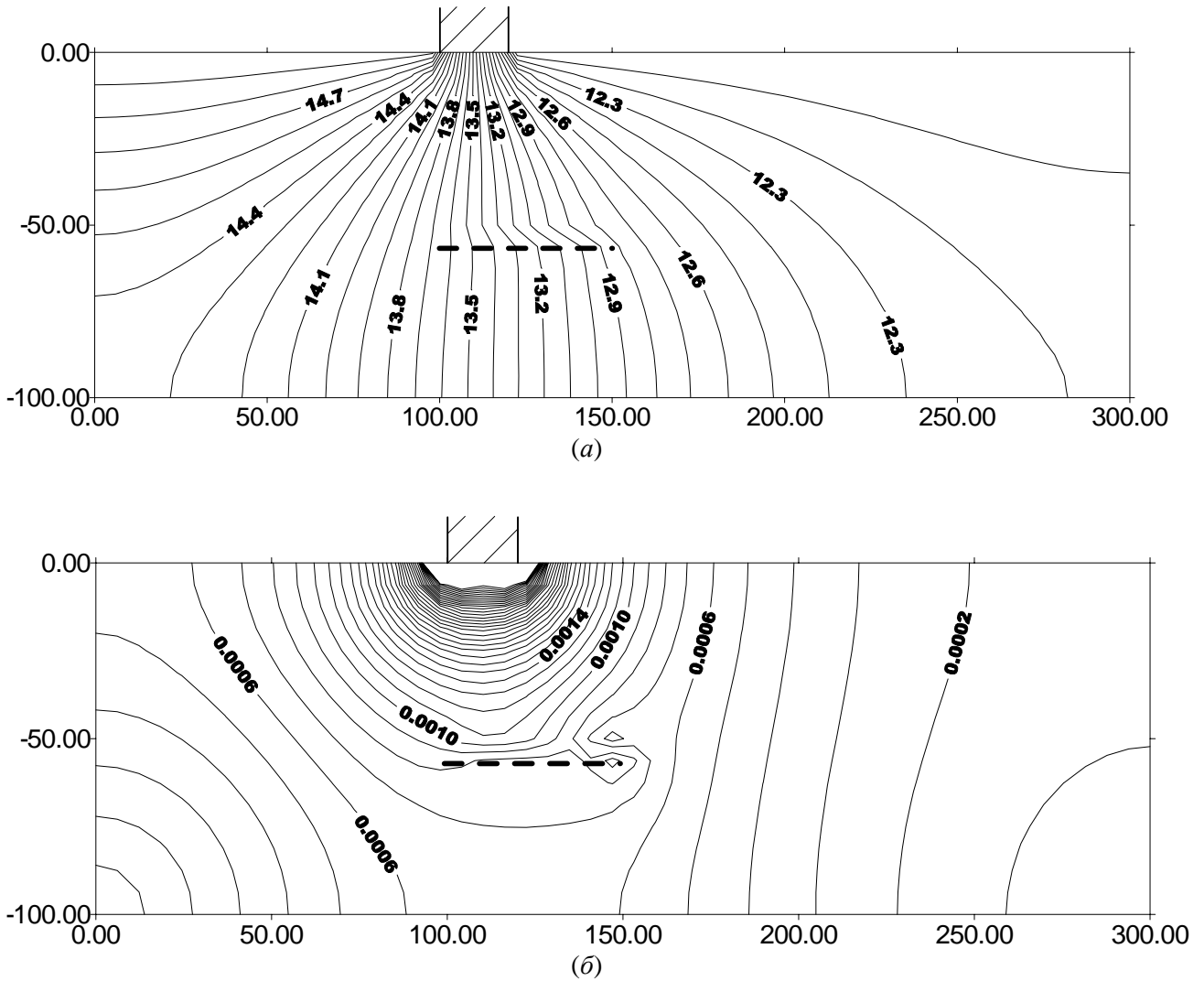


Рис. 3. Поля п'езометричного напору (а) і швидкості руху рідини (б) в області фільтрації

Таблиця 1

Значення вхідного і вихідного потоків при різних ступенях подрібнення сіток СЕ

Сітка № 2		лінійні СЕ		квадратичні СЕ	
Сітка № 1	n_d	1		1	
$n_x \cdot n_y$ квадратичних СЕ	n_l	20	50	20	50
30 · 10	$-Q_i$	12,8903	12,8883	12,8826	12,8823
	Q_o	12,9345	12,9341	12,9330	12,9329
60 · 20	$-Q_i$	13,3795	13,3780	13,3752	13,3750
	Q_o	13,4117	13,4107	13,4102	13,4101
90 · 30	$-Q_i$	13,5935	13,5924	13,5905	13,5904
	Q_o	13,6220	13,6210	13,6198	13,6194

Таблиця 2

Значення вхідного і вихідного потоків при різних положеннях та орієнтації тонкого включення

x_0	y_0	φ	0°	30°	60°	90°
100	-15	$-Q_i$	12,5635	x	x	x
		Q_o	12,6925			
	-35	$-Q_i$	13,4458	13,2052		
		Q_o	13,5005	13,4141	x	x
	-55	$-Q_i$	13,5935	13,4740	12,0776	10,2473
		Q_o	13,6220	13,4750	12,0114	10,4938
	-75	$-Q_i$	13,6244	13,4954	12,7786	12,2871
		Q_o	13,6488	13,5009	12,8003	12,4089
	-95	$-Q_i$	*	*	*	12,7933
		Q_o				12,7504

* – значення не розраховувалися; x – це положення неможливе

Переконавшись у можливості отримання достовірних результатів за допомогою альтернуючого методу Шварца, розрахуємо значення потоків $-Q_i$ і Q_o при різних положеннях тонкого включення і різній його орієнтації щодо осей координат. Параметри подібнення сіток СЕ: $n_d=1$, $n_l=20$, $n_x \cdot n_y=90 \cdot 30$. Сітка № 2 складається з лінійних СЕ, сітка № 1 – з квадратичних. Табл. 2 містить значення $-Q_i$ та Q_o .

За результатами табл. 2 побудовано графік залежності потоку $-Q_i$ від положення та орієнтації тонкого включення (рис. 4). Виходячи з аналізу фізичної суті фільтраційних явищ, можна, не вдаючись до числового моделювання, стверджувати про те, що потік рідини через область фільтрації зростатиме: а) в міру віддалення тонкого включення з пониженою проникністю вглиб області фільтрації, де менша густина ліній потоку; б) в міру зменшення кута між тонким включенням та лініями потоку. Як видно з графіка, результати числового експерименту підтверджують цей попередній висновок.

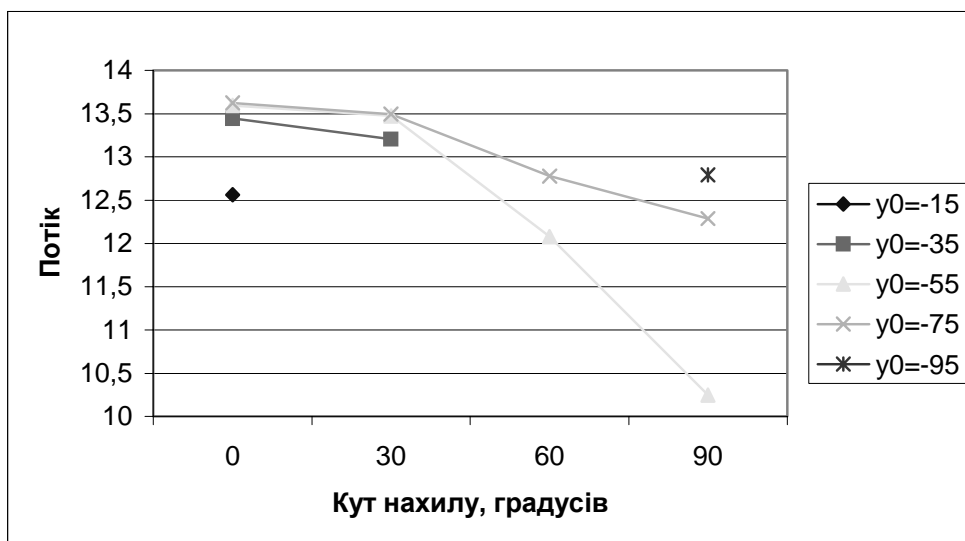


Рис. 4. Залежність вхідного фільтраційного потоку від розміщення і орієнтації тонкого включення

З наведених результатів обчислювального експерименту можна зробити висновок про можливість застосування методів декомпозиції області для розв'язання різноманітних задач усталеної напірної фільтрації, які мають практичне значення.

1. Аравин В.И., Нумеров С.И. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М., 1953. 2. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы. М., 1964. 3. Лукнер Л., Шестаков В.М. Моделирование миграции подземных вод. М., 1986. 4. Ляшко И.И., Сергиенко И.В., Мистецкий Г.Е. Скопецкий В.В. Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ. К., 1981. 5. Марчук Г.И. Математическое моделирование в геофизической гидродинамике. Л., 1987. 6. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М., 1977. 7. Сергиенко И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. К., 1991. 8. P.E.Bjorstad. *Multiplicative and Additive Schwarz Methods: Convergence in the Two-Domain Case*. In: *Domain Decomposition Methods. Proceedings of the 2nd Int. Symp. on Domain Decomposition Methods*, L.A., Calif., Jan. 14-16, 1988. Edited by Tony F.Chan, R.Glowinski, J.Periaux, O.B.Widlund. S.I.A.M. Philadelphia, 1989. 9. A.M. Bruaset, H.P. Langtangen. *Diffpack User's Guide*. URL: <http://www.nobjects.com/Reports/>. 10. *Diffpack WWW home page*. URL: <http://www.nobjects.com/Products/Diffpack/>. 11. Barry F. Smith, Petter E. Bjorstad, William D. Gropp. *Domain Decomposition: Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, 1991.

УДК 548:537.621

Ю.К.Рудавський, О.З.Ватаманюк

Національний університет "Львівська політехніка", кафедра вищої математики

ФУНКЦІОНАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ВІЛЬНОЇ ЕНЕРГІЇ МОДЕЛІ ІЗІНГА З БІКВАДРАТИЧНОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ ДЛЯ S=3/2

© Ю.К.Рудавський, О.З.Ватаманюк, 2000

Підхід функціонального інтегрування застосовано до аналізу моделі Ізінга з біквдратичною взаємодією для S=3/2. Отримано функціональне зображення вільної енергії системи.

A functional integration approach is used for the investigation of the spin-3/2 Ising model with biquadratic exchange interaction. Functional representation for the free energy is obtained.

Розглянемо систему, гамільтоніан якої має вигляд

$$H = H_0 + H_{int} \quad (1)$$

Доданок

$$H_{int} = -\frac{\lambda_1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N J(\vec{R}_i - \vec{R}_j) \vec{S}_i \vec{S}_j - \frac{\lambda_2}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N J(\vec{R}_i - \vec{R}_j) \varrho_i^0 \varrho_j^0 \quad (2)$$