УДК 551.24:528.2/3

О.О. Тадєєва[1], О.А. Тадєєв[1], П.Г Черняга[2]

ДОСТОВІРНІСТЬ РЕЗУЛЬТАТІВ ОПРАЦЮВАННЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ ДАНИХ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Проаналізовано проблеми достовірності результатів опрацювання геодезичних даних методом скінченних елементів. Розкрито деякі оптимізаційні рішення і перспективи методу.

Ключові слова: модель; суцільне середовище; лінійна деформація; метод скінченних елементів; надлишкові виміри; метод найменших квадратів.

Постановка проблеми та її зв'язок з важливими науковими та практичними завданнями

Вивчення сучасного деформованого стану земної кори та її фізичної поверхні – один з актуальних напрямів геодинамічних досліджень, які проводяться з метою опису та прогнозування сучасних геологічних процесів і встановлення закономірностей розвитку структур земної кори. Геодинамічні дослідження спираються на результати різностороннього моніторингу верхніх горизонтів земної кори. Геодезичний моніторинг – основне джерело кількісної інформації про сучасні рухи земної поверхні. Традиційно його результати подають картами векторів зміщень або швидкостей руху фізичної поверхні Землі. Такі результати забезпечують наочність та числове представлення рухів геологічних структур, але не задовольняють умову інваріантності: величини та різні співвідношення, які мають геометричний чи фізичний зміст, не повинні залежати від вибору системи координат або її початку. У зв'язку з необхідністю дотримання цієї умови впродовж останніх десятиліть під час опрацювання та інтерпретації геодезичних даних широкого застосування набув метод скінченних елементів. Його запровадження відкрило нові перспективи інтерпретації результатів геодезичних спостережень і опису деформованого стану земної поверхні.

Аналіз попередніх досліджень

В аспекті поставленої проблеми метод скінченних елементів вперше використали японські вчені для інтерпретації результатів повторних спостережень тріангуляційної мережі після катастрофічного землетрусу Канто-Токай у 1929 р. [Terada, 1929; Tsuboi, 1933]. На пострадянських теренах метод масово застосовується з 1979 р. завдяки науковим напрацюванням М.П. Єсікова [Есиков, 1979]. З того часу запропоновано різні модифікації методу, які стосуються, здебільшого, розширення можливостей його використання для опрацювання різних вихідних даних, зокрема, не лише координат пунктів, а й прямих результатів вимірювань. Серед вітчизняних досліджень потрібно виділити теоретичні розробки і деякі практичні результати, які узагальнено в [Марченко, 2012].

Постановка завдання

Метою роботи є аналіз аспектів інтерпретації геодезичних даних методом скінченних елементів, визначення умов, які знижують інформативність та достовірність результатів і спричиняють формальні наслідки, а також обґрунтування оптимізаційних рішень за таких умов.

Методика досліджень

Метод скінченних елементів ґрунтується на класичній теорії лінійної деформації суцільного середовища. Суцільне середовище є спрощеною моделлю фізичних тіл, яка передбачає неперервність розподілу речовини у нескінченно малому об'ємі. Гранично, якщо об'єм прямує до точки, маємо матеріальну частинку суцільного середовища з його середніми фізико-механічними властивостями. Вона є точкою простору і переміщується внаслідок деформації. Такій матеріальній частинці притаманні одночасно властивості точки, і тіла. Фізичний зміст має не деформація у точці, а середня деформація елементарного об'єму. Математичний опис переміщень і деформацій нескінченно малих об'ємів здійснюється методами механіки суцільного середовища [Ландау, 1953]. Переміщення нескінченно малого об'єму u_{ij} – це границя

$$u_{ij} = \lim_{|\Delta l| \to 0} \frac{\Delta u_i}{\Delta l_j}, \qquad (1)$$

де $|\Delta l|$ – відстань між точками фізичного тіла; Δu – їх відносне переміщення. За умовою теорії лінійної деформації, якщо зменшується $|\Delta l|$, відношення $\Delta u / \Delta l$ змінюється несуттєво і такою зміною можна нехтувати Тоді порядок відстані визначає величину об'єму та його середню лінійну деформацію. За таких умов деформація є однорідною – площини і прямі залишаються такими ж після деформації, а просторові фігури, які вони утворюють, зберігають свою геометричну подібність. Однорідна деформація постійна для усіх точок об'єму у визначеному напрямі. Деформацію елементарного тіла довільної геометричної форми повністю визначають переміщення його вершин. Вони утворюють векторне поле і є функціями координат вершин. Такі функції лінійні, якщо деформація однорідна. Уніфікованим носієм інформації про однорідну лінійну деформацію тіла скінченних геометричних розмірів є тензор деформації – фізичний та геометричний об'єкт, сформований сукупністю коефіцієнтів лінійного перетворення вигляду

$$\bar{u} = f(\bar{l}_i) = \sum_{i=1}^{n} \bar{u}_i \bar{l}_i \,, \qquad (2)$$

де $\bar{u}$ – вектор переміщення вершини; $\bar{l}_i$ – осі ортонормованого базису $(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \cdots, \bar{l}_n)$ евклідового простору L_n; $\bar{u}_i$ – скалярні складові вектора у цьому базисі. Симетрична складова частина тензора деформації різними параметрами описує зміну метричних властивостей елементарного об'єму. Зокрема, ізотропні властивості описує дилатація θ, а девіаторні – головні параметри деформації, які називають зсувними: максимальне розширення E_1 в азимуті φ, мінімальне розширення E_2 та зсув γ_m. Кососиметрична складова тензора величиною кута ω виражає обертання елемента середовища в площинах прийнятого координатного простору.

Тензор, як математичний об'єкт, існує незалежно від системи координат. Його компоненти можуть мати різні значення у різних системах. Але якщо вони задані в одній системі, то будуть визначені і в будь-якій іншій, оскільки визначення цього об'єкта містить у собі закон перетворення його компонент. Тензор можна сформувати не лише для лінійного перетворення, а й для білінійних чи інших нелінійних форм, але це потребує зміни умови (1). Використання тензорного аналізу для опису деформації середовища забезпечує відділення ефектів, пов'язаних з його геометричними формами, від ефектів, зумовлених випадковим вибором координатних систем. Така властивість тензора визначає принцип інваріантності [МакКоннел, 1963].

Суцільне середовище вивчають, встановлюючи співвідношення середніх значень величин, пов'язаних з його нескінченно малими елементами. Якщо збільшується кількість елементів, такі співвідношення перетворюються на системи диференціальних чи інтегральних рівнянь, які описують стан середовища загалом. Оскільки це елементи скінченних розмірів, то можна вважати, що середовище апроксимується дискретною моделлю. Тут найчастіше залучають метод скінченних елементів – систематичний спосіб апроксимації неперервної функції дискретною моделлю, яка є множиною значень функції у деякому скінченному числі точок області її визначення спільно з кусковим представленням цієї функції на скінченній кількості підобластей. Такі підобласті називаються скінченними елементами, а їх найпростішою моделлю є симплекс. При симплексному представленні однорідні локальні поля переміщень вершин апроксимують лінійними функціями їх координат, а відповідні тензори відносять до геометричних центрів симплексів. Кускова апроксимація функції на скінченних елементах дозволяє розглядати їх незалежно один від одного, а сполучення вершин сусідніх елементів забезпечує неперервність і сумісність деформації на їх спільній границі [Есиков, 1979].

Розкриті елементи загальної теорії лінійної деформації суцільного середовища застосовують в умовах земної кори. Ця теорія розроблена безвідносно до властивостей середовища, вона є виключно геометричною теорією. Єдиною необхідною умовою є неперервність і сумісність деформації. Якщо припустити, що верхні горизонти земної кори деформуються, то потрібно брати до уваги, що в ній не виникають порушення суцільності, а точки, які в початковому стані були суміжними, залишаються такими і після деформації. За таких умов під деформацією кори розуміють зміну форми та об'єму її структур, які асоціюються зі скінченними елементами. Скінченні елементи є фізично малими величинами. Разом з тим, вони мають бути представницькими. Отже, їх властивості не повинні залежати від розмірів. Надмірним зменшенням розмірів елементів в умовах земної кори можна описати лише локальні деформації, зумовлені екзогенними процесами, а виявити загальні тенденції досить складно. Протилежний результат забезпечують розміри елементів великого порядку. Тож практично, встановлюючи розміри скінченних елементів приймають компромісне рішення, з урахуванням змісту поставленого завдання, детальності досліджень і умови однорідності деформації (1).

Геодезичні способи моніторингу геодинамічних процесів наклали відбиток на вибір скінченних елементів. Здебільшого для опрацювання беруть результати повторних спостережень державних мереж, побудованих методами тріангуляції чи трилатерації. За геометричними формами скінченних елементів такі мережі цілком відповідають критеріям симплексної моделі – основною геометричною фігурою таких мереж є трикутник. З приводу розмірів трикутників спостерігаються явні невідповідності. Адже державні мережі створюють, щоб задовольнити практичні потреби координатування та картографування територій з відстанями між пунктами відповідно до чинних нормативів. Такі нормативи несумісні з критеріями фізично малих елементів і не враховують геологічної і тектонічної будови земної кори. Винятком є спеціальні мережі на геодинамічних полігонах, де розміри скінченних елементів встановлюють за апріорною інформацією про будову території та перебіг геодинамічних процесів. В обох випадках моделлю скінченних елементів є симплекс.

Результати досліджень

Наслідки застосування методу скінченних елементів для тектонофізичної інтерпретації результатів спостережень геодезичних мереж довели його достатню інформативність. Разом з тим, відзначаються окремі недоліки, які за граничних умов знижують достовірність і формалізують результати опрацювання вихідних даних. Вони спричинені факторами практичного втілення методу і їх невідповідністю теоретичним засадам, котрі розкрито вище. Ці недоліки, їх наслідки, а також шляхи ліквідації, можна сформулювати так.

1. Специфіка геодезичних способів реєстрації переміщень земної поверхні зумовлює дискретність результатів. Надмірне згущення пунктів не завжди доцільне з огляду на відсутність апріорної інформації про характер деформації і високу вартість прецизійних геодезичних робіт. Наслідком є безсистемне, з погляду лінійної теорії деформації, розміщення геодезичних пунктів. З метою подальшого опрацювання результатів спостережень на цих пунктах поверхню поділяють на симплекси. Це породжує першу проблему, суть якої полягає у невідповідності утворених симплексів теоретичним засадам методу скінченних елементів. Якщо маємо справу з суцільними геодезичними мережами у вигляді ланцюжків трикутників або центральних систем, то вибір скінченних елементів хоча й не обґрунтований, але однозначний. Однак навіть така однозначність відсутня під час аналізу спостережень, наприклад, у геодезичному чотирикутнику або на перманентних супутникових станціях. Однозначного принципу поділу земної поверхні на симплекси у таких ситуаціях не існує.

2. В умовах довільно встановленого симплексу лінійна модель деформації необґрунтована. Цей недолік є наслідком першого, але сформульований окремо з таких міркувань. Застосування лінійної моделі передбачає істинність гіпотези локально-однорідної деформації. Гіпотезу потрібно підтвердити, тоді окресленої проблеми не виникає, або відхилити. У цьому випадку відзначається невідповідність умові (1) лінійної теорії деформації і виникає інша проблема. Вона зводиться до необхідності вираження нелінійного закону деформації. Вирішити цю проблему в межах симплексної моделі можна лише за умови

$$k \le n, \tag{3}$$

де k – кількість невідомих коефіцієнтів функції, яка описує закон деформації; n – кількість вершин симплексу. Кількість функцій, котрі задовольняють умову (8), дуже обмежена. Це засвідчує недосконалість симплексної моделі і зумовлює необхідність застосування складніших моделей скінченних елементів, які б задовольняли цю умову. Вони повинні відповідати будь-якому класу функцій, які б відповідно до встановленого критерію виражали закон деформації (зокрема лінійний, якщо деформація однорідна).

Отже, з метою вирішення обох означених проблем необхідною умовою і складовою частиною розв'язання завдання повинна бути перевірка гіпотези однорідності поля деформації. Її результати повинні бути визначальними для встановлення геометричних форм і розмірів скінченних елементів.

3. У класичній постановці задачі компоненти тензора деформації визначають аналітичним способом за переміщеннями мінімально необхідної кількості вершин скінченного елемента. Переміщення пунктів, які окреслюють скінченний елемент, обтяжені неминучими похибками геодезичних вимірів. Порядок похибок змінюється залежно від класу мережі, але навіть з результатами найвищого класу точності неможливо уникнути помилок параметрів деформації. Це зумовлює третю проблему, яка полягає у встановленні надійності, а, у підсумку, й репрезентативності параметрів деформації. Формально точність параметрів деформації можна оцінити середніми квадратичними похибками, оскільки вони виражаються аналітично як лінійні функції координат геодезичних пунктів, наприклад, як у роботі [Есиков, 1979]. Такий підхід забезпечує лише оцінку точності параметрів, проте не вирішує проблеми їх надійності. За теорією похибок, опрацювання результатів вимірів має здійснюватись за обов'язкової наявності надлишкових виміряних величин. Ця умова підвищує надійність кінцевих результатів опрацювання і забезпечує оцінку їх точності за чіткими усталеними критеріями методом найменших квадратів [Мазмишвили, 1968]. Класичний аналітичний розв'язок задачі методом скінченних елементів цієї обставини не враховує: модель лінійної деформації у рамках симплексу передбачає рівність числа k коефіцієнтів лінійної функції і кількості n вершин симплексу. З геодезичного погляду таку задачу зараховують до розряду некоректно поставлених задач. Тому для вирішення проблеми надійності потрібно забезпечити строге виконання умови (3):

$$k < n. \tag{4}$$

Практично це зводиться до встановлення оптимальних геометричних форм скінченних елементів з кількістю вершин, яка забезпечить емпіричне встановлення закону деформації апроксимацією функцій способом найменших квадратів.

Якщо нехтувати окресленими проблемами, то одержимо результати опрацювання із заниженою достовірністю. Такий висновок можна підтвердити прикладами опрацювання даних у геодезичному чотирикутнику. Подібні ситуації виникають під час аналізу спостережень у мережах перманентних супутникових станцій. Достатньо змоделювати типові деформації поверхні, виражені зміщеннями вершин чотирикутника у плоскій прямокутній системі координат. Нижче на схемах показано три такі моделі. Суцільними лініями зображено межі елемента земної поверхні до деформації, пунктиром – після деформації. Зміщення вершин відображено векторами, скалярні складові яких, виражені в метрах, вказано поряд з номерами вершин.

Передусім для кожної моделі розраховано характеристики лінійної деформації поверхні у межах чотирикутника за двома комбінаціями симплексів:

1) трикутники № 1, 2 з вершинами 1, 3, 4 та 1, 2, 3; 2) трикутники № 3, 4 з вершинами 1, 2, 4 та 2, 3, 4. Середнє значення характеристик у кожній комбінації виражає сумарну лінійну деформацію в межах чотирикутника. Результати розрахунку наведено у табл. 1. Порядок числових значень характеристик визначається виключно порядком зміщень вершин і розмірами трикутників. Зменшення на один порядок значень характеристик може бути зумовлене або збільшенням на порядок розмірів трикутників, або зменшенням на порядок зміщень вершин. Результати одержано за умови, що довжини сторін – це перші сотні метрів.

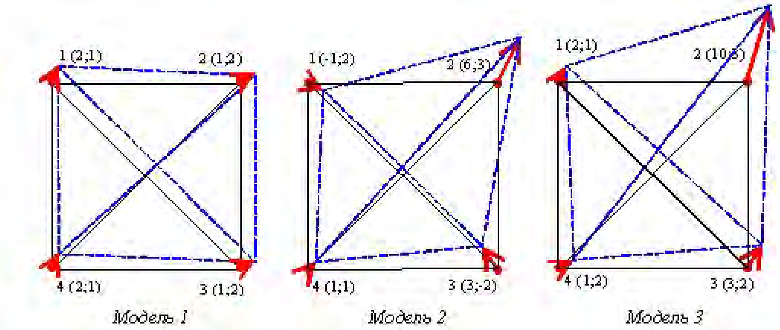
Далі за тими ж вихідними даними розраховано характеристики лінійної деформації поверхні у межах геодезичного чотирикутника без поділу його на симплекси – моделлю скінченного елемента вибрано звичайний геометричний чотирикутник. Якщо допустити, що деформація в його межах лінійна, то є перспектива лінійної апроксимації зміщень вершин способом найменших квадратів. Адже в рамках такої моделі виникають надлишкові виміри і задовільняється умова (4).

Результати розрахунку характеристик для усіх трьох моделей деформації зведено в табл. 2. Крім числових значень характеристик тут наведено відповідні їм середні квадратичні похибки. Оцінку точності здійснено методом найменших квадратів [Мазмишвили, 1968].

Порівняльний аналіз результатів опрацювання вихідних даних у кожній моделі дає підстави зробити певні висновки.

Модель 1. Результати опису деформованого стану поверхні різними характеристиками не залежать від вибору методу опрацювання і моделі скінченних елементів. Тому таку модель можна визнати класичним прикладом лінійної деформації.

Моделі 2, 3. Одержані результати свідчать, що гіпотеза однорідної лінійної деформації поверхні малоймовірна. Значення сумарних компонент деформації, зумовлені ізотропною складовою тензора деформації і тензором обертання, рівні у межах будь-якої з комбінацій симплексів і чотирикутника загалом (зокрема геометричного).



Моделі деформації земної поверхні у межах геодезичного чотирикутника

Таблиця 1

Результати розрахунку характеристик деформації поверхні у межах геодезичного чотирикутника

№			Значення характеристик деформації					
моделі	трикутника	вершин	θ	γ_m	E_1	E_2	φ°	ω°
1	1	1-3-4	0,01	0,014	0,012	-0,002	22,5	0,3
	2	1-2-3	0,01	0,014	0,012	-0,002	22,5	0,3
	середнє значення		0,01	0,014	0,012	-0,002	22,5	0,3
	3	1-2-4	0,01	0,014	0,012	-0,002	22,5	0,3
	4	2-3-4	0,01	0,014	0,012	-0,002	22,5	0,3
	середнє значення		0,01	0,014	0,012	-0,002	22,5	0,3
2	1	1-3-4	-0,05	0,032	-0,009	-0,041	35,8	-0,3
	2	1-2-3	0,04	0,122	0,081	-0,041	40,3	-0,6
	середнє значення		-0,005	0,077	0,036	-0,041	38,0	-0,4
	3	1-2-4	-0,01	0,085	0,038	-0,048	-34,7	-1,7
	4	2-3-4	0	0,092	0,046	-0,046	24,7	0,9
	середнє значення		-0,005	0,088	0,042	-0,047	5,0	-0,4
3	1	1-3-4	0,01	0,014	0,012	-0,002	22,5	-0,9
	2	1-2-3	0,09	0,103	0,096	-0,006	30,5	-2,0
	середнє значення		0,05	0,058	0,054	-0,004	26,5	-1,4
	3	1-2-4	0,03	0,071	0,050	-0,020	-40,9	-2,6
	4	2-3-4	0,07	0,076	0,073	-0,003	11,6	-0,3
	середнє значення		0,05	0,074	0,062	-0,012	-14,6	-1,4

Таблиця 2

Результати розрахунку характеристик деформації поверхні у межах геометричного чотирикутника та їхніх похибок

№ моделі	С.к.п.апроксимації, *м*		Значення характеристик та їх середні квадратичні похибки					
	m_x	m_y	θ	γ_m	E_1	E_2	φ°	ω°
1	0	0	0,01 0	0,014 0	0,012 0	-0,002 0	22,5 0	0,3 0
2	±2,5	±2,0	-0,005 ±0,032	0,076 ±0,064	0,036 ±0,036	-0,041 ±0,036	39,3 ±12,0	-0,4 ±0,9
3	±3,0	±1,0	0,05 ±0,03	0,058 ±0,063	0,054 ±0,035	-0,004 ±0,035	29,5 ±15,5	-1,4 ±0,9

Це свідчить про те, що дилатація і обертання чотирикутника не залежать від закону деформації Якщо ж аналізувати деформований стан поверхні окремо в межах симплексів, то маємо різні результати залежно від вибору їх комбінації. Яку ж комбінацію взяти за основу? Критерію вибору оптимальної комбінації симплексів не існує. Отже, результати аналізу формальні. Останній висновок стосується також аналізу зсувних компонент деформації, які виражає девіаторна складова частина тензора. Причому це рівною мірою стосується і аналізу сумарних деформацій поверхні в межах чотирикутника (геодезичного і геометричного) і, тим більше, їх опису окремо у симплексах. Виявлені факти неоднозначності результатів аналізу більшою мірою стосуються моделі 3. Це закономірно, оскільки тут зміщення вершин майже вдвічі перевищують такі у моделі 2.

На завершення варто звернути увагу на значення середніх квадратичних похибок апроксимації. Для чотирикутника різниця $n-k$ мінімальна, тому загалом очікуються значні за величиною середні квадратичні похибки. Однак точність апроксимації для моделі 1 абсолютна, що засвідчує лінійний закон деформації. Для моделей 2 і 3 похибки апроксимації перевищують абсолютні значення зміщень. Це зумовлює низьку точність параметрів деформації і може свідчити про те, що закон деформації нелінійний.

Сформульовані висновки можна підтвердити перевіркою гіпотези про однорідність зміщень земної поверхні. Істинність гіпотез перевірено ймовірнісно-статистичними способами за заданого рівня значущості. Такий рівень визначає достовірність результатів майбутнього аналізу. Найпоширеніший спосіб перевірки статистичних гіпотез ґрунтується на властивостях функції $F-$розподілу. Його практична цінність зводиться до того, що він забезпечує перевірку рівності двох незалежних статистичних вибірок порівнянням оцінок їх дисперсій. Якщо вибірки підпорядковані нормальному законові розподілу і для них встановлено оцінки дисперсій, то гіпотеза про рівність вибірок вважається істинною за умови, що співвідношення дисперсій вибірок менше від критичного значення функції F-розподілу за заданого рівня значущості [Большев, 1983]. У табл. 3 наведено результати розрахунку оцінок D_x та D_y дисперсій скалярних складових $\bar{u}_x$ та $\bar{u}_y$ зміщень вершин симплексів у межах геодезичного чотирикутника, а також їх попарні співвідношення $D_{\max}/D_i$. Порівняння співвідношень для моделі 1 з критичними значеннями функції $F-$розподілу засвідчує однорідність зміщень вершин. Для моделі 2 маємо чотири випадки, де співвідношення дисперсій перевищують критичні значення $F(Q;2,2)=3$ за рівня значущості $Q=25$ %. Для моделі 3 таких випадків маємо п'ять для складових $\bar{u}_y$, а для складових $\bar{u}_x$ – три випадки перевищення критичних значень $F(Q;2,2)=19$, якщо $Q=5$ %. Величина Q визначає мінімальний поріг ймовірності $p=1-\frac{2Q}{100}$, за якої гіпотеза про рівність дисперсій спростовується. В усіх випадках ймовірність перевищує 0,5 (або 0,9 при $Q=5$%). Це дає підстави стверджувати, що для моделей 2 та 3, хоча й з різною ймовірністю, гіпотезу про рівність дисперсій зміщень слід відхилити як неправдоподібну, а деформацію вважати однорідною недопустимо.

Висновки

У роботі розглянуто аспекти опрацювання геодезичних даних методом скінченних елементів з метою опису деформованого стану земної поверхні. Враховуючи невідповідність умов теоретичним засадам, виділено проблеми, які знижують інформативність та надійність кінцевих результатів і гранично зумовлюють формальні розв'язки. З метою забезпечення достовірності результатів опрацювання геодезичних даних рекомендується: 1) здійснювати попередню перевірку однорідності деформації земної поверхні; 2) узагальнити метод на випадок визначення параметрів деформації у межах скінченних елементів будь-якої геометричної форми, не обмежуючись лише симплексною моделлю; 3) узагальнити метод на випадок визначення параметрів нелінійної деформації.

Таблиця 3

Результати розрахунку співвідношень оцінок дисперсій складових зміщень

№			Оцінки дисперсій, $м^2$		Співвідношення оцінок дисперсій							
моделі	трикутника	вершин	D_x	D_y	$D_{x(\max)} / D_{x(i)}$				$D_{y(\max)} / D_{y(i)}$			
					1	2	3	4	1	2	3	4
1	1	1-3-4	0,33	0,33	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	1-2-3	0,33	0,33	1	1	1	1	1	1	1	1
	3	1-2-4	0,33	0,33	1	1	1	1	1	1	1	1
	4	2-3-4	0,33	0,33	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1-3-4	4	4,3	1				1		4,3	
	2	1-2-3	12,3	7	3,1	1		2,0	1,6	1	7	1,1
	3	1-2-4	13	1	3,2	1,1	1	2,1				
	4	2-3-4	6,3	6,3	1,6			1	1,5		6,3	1
3	1	1-3-4	1	0,3	1							
	2	1-2-3	19	1	19,0	1			3,3	1	1	3,3
	3	1-2-4	24,3	1	24,3	1,3	1	1,1	3,3	1	1	3,3
	4	2-3-4	22,3	0,3	22,3	1,2		1				

Література

Большев Л.Н. Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1983. – 416 с.

Есиков Н.П. Тектонофизические аспекты анализа современных движений земной поверхности. – Новосибирск: Наука, 1979. – 173 с.

Ландау Л.Д. Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. – М.: Гостехиздат, 1953. – 788 с.

Мазмишвили А.И. Способ наименьших квадратов. – М.: Недра, 1968. – 440 с.

Мак-Коннел А.Д. Введение в тензорный анализ. – М.: Физматгиз, 1963. – 411 с.

Марченко О., Третяк К., Кульчицький А. та ін. Дослідження гравітаційного поля, топографії океану та рухів земної кори в регіоні Антарктики. – Львів: Львівська політехніка, 2012. – 308 с.

Terada T. Miyabe N. Deformation of the earth crust in Kwansai districts and its relation to the orographic feature // Bull. Earthquake Res. Inst. – Univ. Tokyo. – 1929. – № 7. – P. 223–239.

Tsuboi C. Investigation on the deformation of the earths crust found by precise geodetic means // Japan J. Astron. and Geophys. – 1933. – №10. – P. 93–248.

ДОСТОВЕРНОСТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБРАБОТКИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ДАННЫХ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

О.А. Тадеева, А.А. Тадеев, П.Г. Черняга

Проанализированы проблемы достоверности результатов обработки геодезических данных методом конечных элементов. Раскрыты некоторые оптимизационные решения и перспективы метода.

Ключевые слова: модель; сплошная среда; линейная деформация; метод конечных элементов; избыточные измерения; метод наименьших квадратов.

RELIABILITY OF RESULTS OF PROCESSING OF GEODETIC DATA BY FINITE ELEMENT METHOD

O.O. Tadyeyeva, O.A. Tadyeyev, P.G. Chernyaha

The problems of reliability of results of processing of geodetic data by finite element method are analyzed. Some optimized solutions and prospects of the method are disclosed.

Key words: model; solid medium; linear deformation; finite element method; redundant measurements; least squares method.

[1]***Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне***

[2]***Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів***

Надійшла 18.12.2012