Vol. 3, No. 1, 2021

https://doi.org/10.23939/cds2021.01.037

**УДК 511.13; 004.89 + 612.82; 510.6**

**П. Кособуцький, М. Каркульовська, Ю. Лозинська**
Національний університет “Львівська політехніка”

# ЗАКОНОМІРНОСТІ ЧИСЕЛ У ТРИКУТНИКУ ФІБОНАЧЧІ, ПОБУДОВАНОМУ НА СТЕПЕНЕВИХ ПЕРЕТВОРЕННЯХ КВАДРАТНОГО ТРИЧЛЕНА



**Показано, що трикутник Фібоначчі утворюється із елементів степеневих перетворень квадратичного тричлена. Він двійковий, структурований доменами рядків однакової довжини, в яких сума чисел формує послідовність чисел. Ця послідовність збігається із перетвореною бісекцією класичної послідовності чисел Фібоначчі. У роботі обґрунтовано правило Паскаля для обчислення елементів у рядках трикутника Фібоначчі.**

**Ключові слова: числа Фібоначчі; трикутник Фібоначчі; правило Паскаля.**

## Вступ

Відомо [1], що із коефіцієнтів степеневих перетворень бінома Ньютона $(x+y)^n$ на координатній площині можна побудувати розташування чисел у вигляді трикутника Паскаля. В таблиці трикутники Паскаля побудовано для значень $x=1, y=1$ у вигляді трикутників прямокутної та симетричної форм. Їхні рядки – це послідовність двійкових чисел

$$1, 2, 3, 4, \ldots, 2^n, \ldots \tag{1}$$

пов’язаних із біноміальними коефіцієнтами тотожністю

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \,, \tag{2}$$

а самі числові ряди позиціонуються як степені $11^n$:

$$\begin{gathered} n=1: \quad 11=11^1, \quad n=2: \quad 121=11^2, \quad n=3: \quad 1331=11^3, \\ n=4: \quad 14641=11^5, n=5: \quad 15101051=11^5, \ldots \end{gathered} \tag{3}$$

| $n$ | Розгорнутий поліном | Прямокутна форма трикутника | Трикутник Паскаля |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | $1x+1y$ | 1 1 | 1 1 |
| 2 | $1x^2+2xy+1y^2$ | 1 2 1 | 1 2 1 |
| 3 | $1x^3+3x^2y+3xy^2+1y^3$ | 1 3 3 1 | 1 3 3 1 |
| 4 | $1x^4+4x^3y+6x^2y^2\ 4xy^3+1y^4$ | 1 4 6 4 1 | 1 4 6 4 1 |

У цих трикутниках уздовж бісектрис вершинного кута формується ряд чисел Каталана 1, 2, 6, 20, 70,…., а суми чисел вздовж висхідної діагоналі трикутника дорівнюють числам Фібоначчі

$$F_n: \ 0,1, \qquad 1,2,3,5,8,\ldots, \quad n \ge 0\,, \tag{4}$$

де значення перших двох чисел фіксовані. Вперше на це звернув увагу Пойя [2].

Відомі трикутники із узагальнених чисел Фібоначчі (*Fibonacci p-triangle*) як двовимірна модель послідовності чисел Фібоначчі [3]:

$$\{F_{p,0} = 0, F_{p,1} = F_{p,2} = F_{p,3} = \ldots F_{p,p} = 1: \quad F_{p,n} = F_{p,n-1} + F_{p,n-p-1}, \quad n \rangle\ p \tag{5}$$

закономірності яких детально вивчено, зокрема в працях [3–6]. У цій роботі досліджено закономірності трикутника чисел (*Fibonacci 1-triangle*), побудованого на коефіцієнтах $\alpha_n, \beta_n$ степеневого перетворення

$$x^n = \alpha_n x + \beta_n \tag{6}$$

квадратного тричлена

$$x^2 = px + q \tag{7}$$

для якого вперше узагальнено закономірності (2) і (3) для довільних значень $p, q$.

В інтервалі додатних значень показника степеня $n \rangle\ 0$ перетворення (6) мають вигляд:

$$\begin{cases} n=0: \quad x^0 = 0\cdot x + 1 = \alpha_0 \cdot x + \beta_0, \\ n=1: \quad x^1 = +1\cdot x + 0 = \alpha_1 \cdot x + \beta_1, \\ n=2: \quad x^2 = p^1 x + q = \alpha_2 x + \beta_2, \\ n=3: \quad x^3 = (p^2+q)x + pq = \alpha_3 x + \beta_3, \\ n=4: \quad x^4 = (p^3+2pq)x + (p^2+q)q = \alpha_4 x + \beta_4, \\ n=5: \quad x^5 = (p^4+3p^2q+q^2)x + (p^3+2pq)q = \alpha_5 x + \beta_5, \\ n=6: \quad x^6 = (p^5+4p^3q+3pq^2)x + (p^4+3p^2q+q^2)q = \alpha_6 x + \beta_6, \\ n=7: \quad x^7 = (p^6+5p^4q+6p^2q^2+q^3)x + (p^5+4p^3q+3pq^2)q = \alpha_6 x + \beta_6, \\ n=8: \quad x^8 = (p^7+6p^5q+10p^3q^2+4pq^3)x + (p^6+5p^4q+6p^2q^2+q^3)q = \alpha_6 x + \beta_6 \\ \ldots.. \end{cases} \tag{8}$$

У (8) послідовності чисел $\{\alpha_n\}$ рекурентні, а їх члени $\alpha_n$ обчислюють за формулами

$$\alpha_{n+2} = p\alpha_{n+1} + q\alpha_n, \quad n \ge 0 \tag{9}$$

доповненими початковими умовами

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 1. \tag{10}$$

Якщо $p = 1, q = 1$, то послідовністю чисел $\{\alpha_n\}$ є послідовність $\{F_n\}$ (4). Члени послідовностей $\{\beta_n\}$, зв’язані із членами послідовності $\{\alpha_n\}$ за формулою

$$\beta_n = q\alpha_{n-1} \tag{11}$$

тому також рекурентні.

Випишемо із (8) вирази для $\alpha_n$ у вигляді прямокутного символічного трикутника Паскаля (рис. 1, *а*). Це Fibonacci 1-triangle. Для $p = 1, q = 1$ у числовій формі його наведено на рис. 1, *б*. У перетвореннях (8) перші два числа $\alpha_0, \alpha_1$ фіксовані (10), тому в трикутнику Фібоначчі нульове значення $\alpha_0 = 0$ до уваги не взято. Якщо в трикутнику Паскаля сума чисел у рядках обчислюється за допомогою бінома Ньютона $(1+1)^n$, то в Fibonacci 1-triangle аналогічні закономірності (якщо $p=1, q=1$ двійкування чисел (1)) представлення чисел спостерігаються уздовж низхідної діагоналі, вздовж якої біном Ньютона має вигляд

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^{n-k} q^k = \binom{n}{0} p^n q^0 + \binom{n+1}{1} p^{n-1} q^1 + \binom{n+2}{2} p^{n-2} q^2 + \ldots + \binom{n+k}{n} p^0 q^n \quad (12)$$

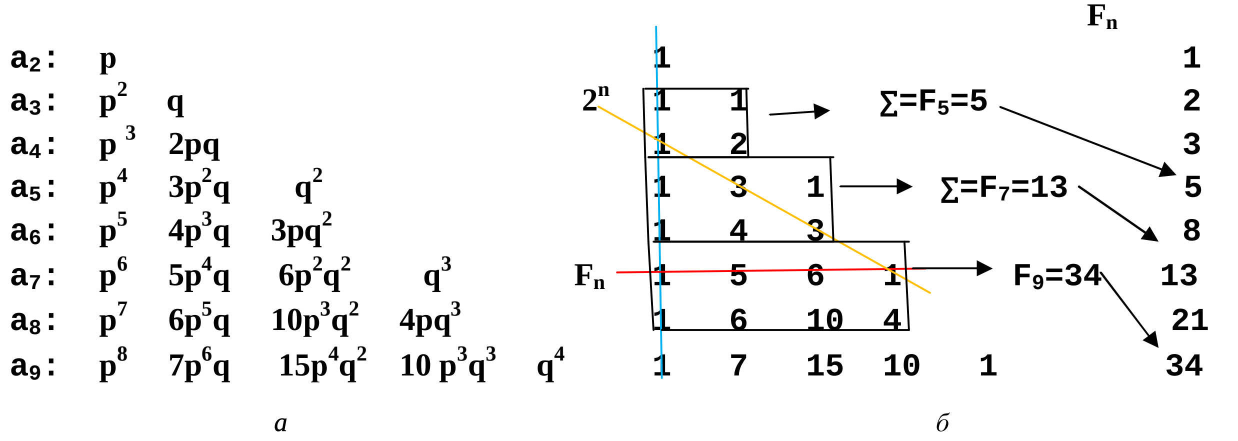


*Рис. 1*

За композицією розташування елементів the Fibonacci 1-triangle нагадує Fibonacci 2-triangle [6]. В Fibonacci 1-triangle усі рядки розпочинаються із одиниці, а закінчуються або числом $\frac{m+2}{2} = \frac{n}{2}$, якщо він парний, або одиницею, якщо непарний. Елементи довільного рядка $n$ обчислюють як суму елементів двох попередніх рядків за алгоритмом:

$$\begin{cases}
\begin{array}{llllllllll}
m=0 & 1 & & 0\ \ 1 & m=0 & 1\ \ 0 & & m=9 & 1 \\
 & & & + & & & & & \\
m=1 & 1\ \ 1 & & 1\ \ 1 & m=1 & 1\ \ 1 & 0\ \ 1\ \ 1 & m=1 & 1\ \ 1 \\
 & & & = & & & + & & \\
 & & & 1\ \ 2 & m=2 & 1\ \ 2 & 1\ \ 2\ \ 0 & m=2 & 1\ \ 2 \\
 & & & & & & = & & \\
 & & & & & & 1\ \ 3\ \ 1 & m=3 & 1\ \ 3\ \ 1
\end{array}
\end{cases} \quad (13)$$

де після підсумування результуючий рядок зсувається праворуч. У трикутнику Паскаля класичної симетричної форми вздовж рядків чисел Фібоначчі сума сусідніх чисел задовольняє відоме правило Паскаля. Тому алгоритм (13) – це рекурентне правило для обчислення елементів рядків у Fibonacci 1-triangle.

Як показано на рис. 1, *б*, площа the Fibonacci 1-triangle бінарно структурується областями (виділеними різними кольорами) із двох рядків однакових довжин непарного і парного номерів. Аналогічні області структурування із трьох і чотирьох рядків однакових довжин можна виділити в the Fibonacci 2-triangle і Fibonacci 3-triangle [6].

Рекурентне правило для знаходження суми чисел в однотипних областях має вигляд

$$F_{2n+p} = F_{2n-1} + F_{2n}, \quad n \geq 1 \quad (14)$$

Для the Fibonacci 1-triangle послідовність чисел (14) дорівнює

$$F_{2n}:\ 2, 5, 13, 34, 89, \ldots\ n \geq 1. \quad (15)$$

А це ряд чисел, одержаний бісекцією послідовності Фібоначчі $\{F_n\}$ (4).

Наведемо міркування, що підтверджують правомірність формування послідовності (15). Для цього розглянемо степеневе перетворення до квадратного тричлена типу $px+q=x^2$:

$$(px+q)^0=1,\ (px+q)^1=x^2,\ (px+q)^2=x^4,\ (px+q)^3=x^6,\ldots,(px+q)^n=x^{2n} \tag{16}$$

Тепер послідовність (16) застосуємо до коренів $x_{\pm}=\dfrac{p\pm\sqrt{p^2+4q}}{2}$:

$$\begin{cases}1, & x_+{}^2, & x_+{}^4, & x_+{}^6,\ldots,x_+{}^{2n},\ldots\\ 1, & x_-{}^2, & x_-{}^4, & x_-{}^6,\ldots,x_-{}^{2n},\ldots\end{cases}$$ із яких сформуємо різницю:

$$2,\ x_+{}^2-x_-{}^2,\ x_+{}^4-x_-{}^4,\ x_+{}^6-x_-{}^6,\ldots,x_+{}^{2n}-x_-{}^{2n} \tag{17}$$

Отже, якщо взяти до уваги відому [1] формулу Біннета, то також одержимо бісекційну послідовність

$$\sqrt{p^2+4q}\cdot\{F_0,\ F_2,\ F_4,\ F_6,\ \ldots,F_{2n},\ldots\} \tag{18}$$

аналогічну до (15).

Перейдемо до узагальнення закономірностей (2) і (3) у трикутнику Фібоначчі із довільними значеннями множників $p, q$. Степеневі біноми (12) формують аналогічні (2) узагальнені послідовності чисел

$$(p+q)^0,\ (p+q)^1,\ (p+q)^2,\ (p+q)^3,\ldots,(p+q)^n,\ldots \tag{19}$$

$$(p\times q)^m=\begin{cases} m=1:\quad (p\times q)^1=p\quad q,\\[6pt] m=2:\quad (p\times q)^2=\begin{array}{c} p\quad q\\ \times\\ p\quad q\\ \hline p^2\quad qp\quad qp\quad q^2=p^2\quad 2qp\quad q^2\end{array}\\[6pt] m=3:\quad (p\times q)^3=\begin{array}{c} p^2\quad 2qp\quad q^2\\ \times\\ p\quad q\\ \hline p^3\quad 2qp^2\quad pq^2\quad qp^2\quad 2q^2p\quad q^3=p^3\quad 3qp^2\quad 3q^2p\quad q^3\end{array}\\ \ldots\end{cases} \tag{20}$$

Отже, якщо $p=1, q=1$, то

$$(1\times1)^m=\begin{cases} m=1:\quad (1\times1)^1=11,\\[6pt] m=2:\quad (1\times1)^2=\begin{array}{c} 1\quad 1\\ \times\\ 1\quad 1,\\ \hline 1\quad 2\quad 1=121\end{array},\\[6pt] m=3:\quad (1\times1)^3=\begin{array}{c} 1\quad 2\quad 1\\ \times\\ 1\quad 1\\ \hline 1\quad 3\quad 3\quad 1=1331\end{array},\\ \ldots\end{cases} \tag{21}$$

Трикутник чисел Фібоначчі побудований на перетвореннях (6) для значень $p=1, q=1$. Однак на площині прямокутних декартових координат $0pq$ на параболі $p=\sqrt{q}$ існує множина точок із координатами $p,q$, для якої зберігаються описані вище закономірності трикутника Фібоначчі:

$$p=\sqrt{q},:\begin{cases}
\alpha_2/p & 1 \\
\alpha_3/p^2 & 1\quad 1 \\
\alpha_4/p^3 & 1\quad 2 \\
\alpha_5/p^4 & 1\quad 3\quad 1 \\
\alpha_6/p^5 & 1\quad 4\quad 3 \\
\alpha_7/p^6 & 1\quad 5\quad 6\quad 1 \\
\alpha_8/p^7 & 1\quad 6\quad 10\quad 4 \\
 & \ldots \\
Column & 0^{th}\ 1^{th}\ 2^{th}\ 3^{th}\ ..
\end{cases} \tag{22}$$

В інших точках $p\neq 1, q\neq 1$, наприклад, для фазового напрямку $p=q=s$ [7], в трикутнику Фібоначчі

$$p=3, q=3:\left\{\begin{array}{lllllllll|l}
Rows, n & & & & & & & & & F_{n+2}=3F_{n+1}+3F_n \\
2 & 3 & & & & & & & & 3 \\
3 & 9 & 3 & & & & & & & 12 \\
4 & 27 & 18 & 0 & & & & & & 45 \\
5 & 81 & 81 & 9 & 0 & & & & & 171 \\
6 & 243 & 324 & 81 & 0 & 0 & & & & 648 \\
7 & 729 & 1215 & 486 & 27 & 0 & 0 & & & 2457 \\
8 & 2187 & 4374 & 2430 & 324 & 0 & 0 & 0 & & 9315 \\
 & & & & \ldots & & & & &
\end{array}\right. \tag{23}$$

сума чисел вздовж рядків також дорівнює відповідному числу $F_n$, а вздовж діагональних напрямків, паралельних до гіпотенузи трикутника (23), відповідно до правила (2) обчислюється як:

$$(3+3)^0,(3+3)^1,(3+3)^2,(3+3)^3,\ldots \Rightarrow (s+s)^0,(s+s)^1,(s+s)^2,(s+s)^3,\ldots \tag{24}$$

Отже, якщо $p=q=s$, то для трикутника Фібоначчі правило (13) реалізується аналогічно з тією відмінністю, що результат підсумування треба домножити на $s$:

$$\begin{cases}
m=1 \quad 9\quad 3 & 9\quad 3 & m=2 \quad 9\quad 3 \\
 & + & \\
m=2 \quad 27\quad 18 & 27\quad 18 & m=2 \quad 27\quad 18 \\
 & = & \\
 & 27\quad 27\quad 3 & m=3 \quad 81\quad 81\quad 9
\end{cases} \tag{25}$$

Якщо $p\neq q$, правило (25) обчислення елементів рядків у трикутнику Фібоначчі справджується із урахуванням відомого рекурентного співвідношення

$$F_{n+2}=pF_{n+1}+qF_n \tag{26}$$

Продемонструємо його на конкретному прикладі:

$$\begin{matrix}p=2\\ q=3\end{matrix}:\left\{\begin{array}{lllllllll|l}
m & & & & & & & & & F_{n+2}=2F_{n+1}+3F_n \\
0 & 2 & & & & & & & & 2 \\
1 & 4 & 3 & & & & & & & 7 \\
2 & 8 & 12 & 0 & & & & & & 20 \\
3 & 16 & 36 & 9 & 0 & & & & & 61 \quad \Rightarrow \\
4 & 32 & 96 & 54 & 0 & 0 & & & & 182 \\
5 & 64 & 240 & 216 & 27 & 0 & 0 & & & 547 \\
6 & 128 & 576 & 720 & 216 & 0 & 0 & 0 & & 1640 \\
 & & & & \ldots & & & & &
\end{array}\right. \qquad (27)$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{llllllllllllll}
m=3 & 16 & 36 & 9 & & & 16\cdot 3\cdot & 36\cdot 3 & 9\cdot 3 & & & & & \\
 & & & & & & & + & & & & & & \\
m=4 & 32 & 96 & 54 & 32\cdot 2 & 96\cdot 2 & 54\cdot 2 & & & & & & & \\
 & & & & & & & = & & & & & & \\
 & & & & 64 & 240 & 216 & 27 & & m=5 & 64 & 240 & 216 & 27
\end{array}\right.$$

Якщо $p=q\neq 1$, то подання чисел (3) справджується у вигляді:

$$\mathit{Fibonacci} \quad 2-\mathit{triangle}$$

$$p=3, q=3:\ \left\{\begin{array}{lllll}
\alpha_n & & & & \\
\alpha_2 & 3 & & & \\
\alpha_3 & 9 & 3 & & \to 33=3\cdot(11)=3^1\cdot(11)^1 \\
\alpha_4 & 27 & 18 & & \\
\alpha_5 & & 81 & 9 & \to 9189=3^2\cdot(121)=3^2\cdot(11)^1 \\
\alpha_6 & & & 81 & \\
\alpha_7 & & & & 27 \to 27818127=3^3\cdot(1331)=3^3\cdot(11)^3 \\
 & & & \ldots &
\end{array}\right. \qquad (28)$$

Якщо $p\neq q$, треба застосувати запропонований у цій роботі алгоритм поелементного перемноження

$$\mathit{Fibonacci} \quad 2-\mathit{triangle}$$

$$p=2, q=3:\ \left\{\begin{array}{lllll}
\alpha_n & & & & \\
\alpha_2 & 2 & & & \\
\alpha_3 & 4 & 3 & & \\
\alpha_4 & 8 & 12 & & \\
\alpha_5 & & 36 & 9 & \\
\alpha_6 & & & 54 & \\
\alpha_7 & & & & 27 \\
 & & \ldots & &
\end{array}\right. \to 4129=23\times 23=\left\{\begin{array}{lll}
 & 23 & \\
 & \times & \\
 & 23 & \\
 & = & \\
 & 6 & 9 \\
4 & 6 & \\
- & - - - - & \\
4 & 12 & 9
\end{array}\right. =(23)^2 \qquad (29)$$

або

$$p=2,q=3:\left\{\begin{array}{lllllll} & & & & \textit{Fibonacci} & 2-\textit{triangle} & \\ \alpha_n & & & & & & \\ \alpha_2 & 2 & & & & & \\ \alpha_3 & 4 & 3 & & & & \\ \alpha_4 & 8 & 12 & & & & \\ \alpha_5 & & 36 & 9 & & & \\ \alpha_6 & & & 54 & & & \\ \alpha_7 & & & & 27 & & \\ & & \ldots & & & & \end{array}\right. \rightarrow 36\ 54\ 27 = 23\times 23\times 23 = \left\{\begin{array}{l} 4\ 12\ 9 \\ \times \\ 23 \\ = \\ 12\quad 36\quad 27 \\ 8\quad 24\quad 18 \\ -------- \\ 8\quad 36\quad 54\quad 27 \end{array}\right. = (23)^3 \qquad (30)$$

Обґрунтуємо закономірність бісекції (14)–(15) послідовності чисел Фібоначчі (28) у загальному випадку для довільних значень $p, q$.

$$p=2, q=3:\left\{\begin{array}{lllllllll} n & & & & & & & F_{n+2}=2F_{n+1}+3F_n & \\ 1 & 1 & & & & & & 1 & \\ 2 & 2 & & & & & & 2 & \\ 3 & 4 & 3 & & & & & 7 & \\ 4 & 8 & 12 & 0 & & & & 20 & \\ 5 & 16 & 36 & 9 & 0 & & & 61 & (b) \\ 6 & 32 & 96 & 54 & 0 & 0 & & 182 & \\ 7 & 64 & 240 & 216 & 27 & 0 & 0 & 547 & \\ 8 & 128 & 576 & 720 & 216 & 0 & 0 & 1640 & \\ & & & \ldots & & & & & \end{array}\right. \qquad (31)$$

Якщо $p \neq q$, числа Фібоначчі в структурованих бінарно областях обчислюють за правилом (25) додавання елементів у стовпцях:

(32)

## Висновок

Трикутник Фібоначчі, сформований із елементів степеневих перетворень квадратного тричлена, бінарно структурується областями із рядків однакових довжин, в яких сума чисел формує послідовність чисел, яка збігається із перетвореною бісекцією класичної послідовності чисел Фібоначчі. Обґрунтовано правило Паскаля для обчислення елементів у рядках трикутника Фібоначчі та загальні співвідношення двійкування чисел у рядках для довільних значень $p, q$.

## Література

*1. Koshy, T. "Fibonacci and Lucas numbers with application", A Wiley-Interscience Publication: New York, 2001. https://doi.org/10.1002/9781118033067.*

*2. Polya, G. Mathematicaal Discavery. John Wiley Sons, Inc. 1962 (vol. I) and 1965 (vol. II).*

*3. Hosoya, H. Fibonacci triangle. FQ, 1976, 173–179.*

*4. Stakhov, A. P. Fibonacci matrices, a generalizatin of the Cassini formula, and a new coding theory. Chaos, Solitons and Fractals, 2006, 30, 56–66. Stakhov, A. P, Aranson, S. The Golden Non-Euclidean Geometry. World Scientific, 2016. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.12.054.*

*5. Falcon, S., Plaza, A. The k-Fibonacci sequence and the Pascal 2-triangle. Chaos, Solitons and Fractals, 2007, 33, 38–4. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.10.022.*

*6. Kuhapatanakul, I. K. The Fibonacci p-numbers and Pascal's triangle. Cogent Mathematics, 2016, 3, 1–7. https://doi.org/10.1080/23311835.2016.1264176.*

*7. Kosobutskyy, P. S. Phidias numbers as a basis for Fibonacci analogues. Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 2020, 26(1): 172–178. https://doi.org/10.1080/23311835.2016.1264176.*

**P. Kosobutskyy, M. Karkulovska, Yu. Losynska**
Lviv Polytechnic National University

## REGULARITIES OF NUMBERS IN THE FIBONACHI TRIANGLE CONSTRUCTED ON THE DEGREE TRANSFORMATIONS OF A SQUARE THREE MEMBERS



**In this paper, it is shown that the Fibonacci triangle is formed from the elements of power transformations of a quadratic trinomial. It is binary structured by domains of rows of equal lengths, in which the sum of numbers forms a sequence of certain numbers. This sequence coincides with the transformed bisection of the classical sequence of Fibonacci numbers. The paper substantiates Pascal's rule for calculating elements in the lines of a Fibonacci triangle. The general relations of two forgings of numbers in lines of a triangle of Fibonacci for arbitrary values are received**

**Key words: Fibonacci numbers; Fibonacci triangle; Pascal's rule.**