

# ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ ДИНАМІКИ, МІЦНОСТІ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ПРОМИСЛОВОГО УСТАТКУВАННЯ

УДК 621.548

М.В. Боженко, Т.-Н.М. Ванькович, Я.А. Зінько, О.О. Тихонов  
Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра теоретичної механіки

## КРИТИЧНІ ШВИДКОСТІ ОБЕРТАННЯ ВАЛІВ ЗМІННОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

© Боженко М.В., Ванькович Т.-Н.М., Зінько Я.А., Тихонов О.О., 2008

Подано спосіб приблизного визначення критичних значень кутових швидкостей обертання неоднорідних пружних валів, який заснований на методі часткової дискретизації. Розглянуті вали, які мають шарнірні опори та консольні. Наведені приклади, які ілюструють запропонований спосіб.

The paper presents the way of obtaining approximate critical values for angular speeds of rotating heterogeneous elastic shafts which is based on the method of partial discretization. Hinged and cantilever shafts are regarded in the paper. The method is illustrated by examples.

**Актуальність, постановка задачі, мета дослідження.** Для пружних валів, які обертаються з деякою кутовою швидкістю  $\omega$  навколо нерухомої осі, яка збігається з недеформованою прямолінійною віссю, існують критичні значення  $\omega_{кр}$  [1]. Вони збігаються, як правило, з частотами власних коливань вала. При цьому найбільше практичне значення мають низькі частоти. Задача їх визначення для валів з вільним розподілом параметрів є важливою, але в той же час може виявитися важкою. Нижче показано, що до розв'язання вказаних задач доцільно застосовувати метод часткової дискретизації [2–4]

**Викладення основного матеріалу дослідження.** 1. Коефіцієнти впливу і диференціальні рівняння руху.

Розглядається пружний вал змінного поперечного перетину, вісь якого спрямована зліва праворуч по прямій ОХ. Наприклад у точках  $x_i$  вала зосереджені маси  $M_i$  маховиків (порівняно з ними розподілену масу вала не беремо до уваги); при цьому виконуються умови

$$0 < X_1 < X_2 < \dots < X_n < L,$$

де  $L$  – довжина вала.

Для визначення власних частот поперечних коливань вала складемо диференціальне рівняння малих коливань мас  $M_i$  біля прямолінійного стану рівноваги (в оберненій формі) [1]:

$$\sum_{j=1}^n M_j \beta_{ij} \frac{d^2 y_j}{dt^2} + y_i \quad (i=1,2,\dots,n), \quad (1)$$

де  $\beta_{ij}$  – відповідні коефіцієнти впливу.

Вони визначаються з універсального рівняння пружної лінії за заданих умов закріплення кінцевих перетинів вала [2].

Розглянемо випадок шарнірних опор та консольного закріплення (лівого кінця). При цьому, враховуючи  $X_i \leq X_j$ , можна відповідно використати формули

$$\beta_{ij} = -K(L, x_j) \frac{x_j}{L} + \left(1 - \frac{x_j}{L}\right) \left[ K(L, 0) \frac{x_j}{L} - K(x_i, 0) \right], \quad (2)$$

$$\beta_{ij} = -x_j \dot{K}(x_i, 0) - K(x_i, 0). \quad (3)$$

Одночасно необхідно враховувати, що  $V_{ij} = V_{ji}$  (це рівняння, яке витікає з теореми Максвелла про взаємність переміщень, можна довести безпосередньо, використовуючи формулу, яка аналогічна (2) або (3)).

В формулах (2)–(3)  $K(x, \alpha)$  – функція Коші, яка визначається так:

$$K(x, \alpha) = \int_{\alpha}^x \frac{1}{f(s)} (x-s)(s-\alpha) ds. \quad (4)$$

де  $f(x) \equiv EI(x)$  – жорсткість вала при поперечному згині;  $\alpha$  – параметр; точкою над функцією  $K$  в формулі (3) позначена її власна похідна по  $\alpha$ .

Частотне рівняння, яке відповідає системі диференціальних рівнянь (1), має такий вигляд [2]:

$$1 - a_1 p^2 + a_2 p^4 - \dots + (-1)^n a_n p^{2n} = 0, \quad (5)$$

де  $p$  – параметр частоти; значення  $a_i$  визначаються за такими виразами:

$$a_1 = \sum_{i=1}^n M_i \beta_{ii}; \quad a_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^n M_i M_j \begin{vmatrix} \beta_{ii} \beta_{ij} \\ \beta_{ji} \beta_{jj} \end{vmatrix};$$

$$a_3 = \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j>i}^{n-1} \sum_{k>j}^n M_i M_j M_k \begin{vmatrix} \beta_{ii} \beta_{ij} \beta_{ik} \\ \beta_{ji} \beta_{jj} \beta_{jk} \\ \beta_{ki} \beta_{kj} \beta_{kk} \end{vmatrix}; \quad a_n = M_1 M_2 \dots M_n \begin{vmatrix} \beta_{11} \beta_{12} \dots \beta_{1n} \\ \beta_{21} \beta_{22} \dots \beta_{2n} \\ \dots \\ \beta_{n1} \beta_{n2} \dots \beta_{nn} \end{vmatrix}.$$

Відмітимо, що корені  $P^2$  рівняння (5) отримуються завжди дійсними і додатними (це зрозуміло із змісту задачі, яку розглядали).

2. *Приклад розв'язування задачі для вала з шарнірними опорами.*

Позначимо:  $X_1 = l$ ,  $x_2 = 2l$ ,  $L = 3l$ ,  $f_1 = f_3 = k_1 f$ ,  $f_2 = k_2 f$  ( $f = \text{const}$ )

де  $f_1, f_3$  – згинальна жорсткість при  $0 \leq x < l^2$  і  $2l < x \leq L$ ;  $f_2$  – згинальна жорсткість при  $l \leq x \leq 2l$ .

Використовуючи формули (2) і (3), знаходимо:

$$K(l, 0) = \frac{l^3}{6k_1 f}; \quad K(3l, 0) = \frac{l^3}{3f} \left( \frac{7}{k_1} + \frac{13}{2k_2} \right); \quad (7)$$

$$K(3l, l) = \frac{2l^3}{3f} \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right); \quad K(3l, 2l) = \frac{l^3}{6k_1 f};$$

$$\beta_{11} = \beta_{22} = \frac{l^3}{54f} \left( \frac{10}{k_1} + \frac{14}{k_2} \right);$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = \frac{l^3}{54f} \left( \frac{8}{k_1} + \frac{13}{k_2} \right); \quad (8)$$

а відповідно,

$$a_1 = (M_1 + M_2) \beta_{11}; \quad a_2 = M_1 M_2 (\beta_{11}^2 - \beta_{12}^2). \quad (9)$$

При цьому дискримінант частотного рівняння (бікватратного) приводиться до такого вигляду:

$$D = \beta_{11}^2 (M_1 - M_2)^2 + 4M_1 M_2 \beta_{12}^2. \quad (10)$$

Очевидно,  $D > 0$  та  $a_2 > 0$ ; тому корені завжди додатні і дійсні. Вони визначаються за формулою

$$P_{1,2}^2 = \frac{1}{2a_2} (a_1 \pm \sqrt{D}). \quad (11)$$

Зауважимо, що при  $M_1 = M_2 = M$  ці формули для квадратів частот стають особливо простими:

$$P_1^2 = \frac{1}{M(\beta_{11} + \beta_{12})}; \quad P_2^2 = \frac{1}{M(\beta_{11} - \beta_{12})}. \quad (12)$$

Якщо звернути увагу на (8), звідти отримуємо критичні значення кутової швидкості цього ступінчастого вала з двома однаковими маховиками

$$\omega_1^2 = \frac{6EI}{Ml^3 \left( \frac{2}{K_1} + \frac{3}{K_2} \right)}; \quad \omega_2^2 = \frac{54EI}{Ml^3 \left( \frac{2}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right)}. \quad (13)$$

Розглянемо деякі часткові випадки.

$$\text{а) } K_1=K_2=1; \quad \omega_1^2 = \frac{6}{5} \frac{EJ}{Ml^3}; \quad \omega_2^2 = \frac{18EJ}{Ml^3} \quad (14)$$

Звідси враховуючи, що  $l = \frac{1}{3}L$ , приходимо до відомих значень (5):

$$\omega_1 = 5,69A; \quad \omega_2 = 22,04A; \quad A = \sqrt{\frac{EJ}{ML^3}}; \quad (15)$$

б) діючи аналогічно, складаємо таблицю.

У табл. 1 параметр  $\varepsilon$  задовольняє нерівність  $0 < \varepsilon \leq 1$ .

Таблиця 1

### Розраховані параметри

$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\omega_1/A$	$\omega_2/A$	$\omega_2/\omega_1$
1		9	27	3
	1	7,35	38,18	5,19
1		7,35	38,18	5,18
	1	9	27	3

Як очевидно, зміною жорсткостей частин вала можна сильно впливати на критичні значення кутової швидкості.

### 3. Приклад для консольного вала конічної форми.

Нехай

$$f(x) = f \left(1 - \mu \frac{\gamma}{L}\right)^4 \quad (f = \text{const}; \quad 0 \leq \mu < 1), \quad x_i = a_i L.$$

За формулами (3) та (4) знаходимо:

$$K(x, \alpha) = \frac{(x - \alpha)^3}{6f \left(1 - \mu \frac{\gamma}{L}\right)^2 \left(1 - \mu \frac{\gamma}{L}\right)^2}; \quad (16)$$

$$\beta_{ij} = \frac{a_i^2 L^3}{6f(1 - \gamma a_i)^2} [3a_j - a_i(2\gamma a_j + 1)] \quad (i \leq j). \quad (17)$$

Зауважимо, що формула (17) дозволяє записати частотне рівняння (5) для конічного вала з довільною кількістю маховиків. Тут також показано випадок  $n=2$ . При цьому розв'язання відповідного біквдратного рівняння можна записати так:

$$P_{1,2}^2 = \frac{\beta_{11} + \mu\beta_{22} \mp \sqrt{(\beta_{11} - \mu\beta_{22})^2 + 4\mu\beta_{12}^2}}{2\mu M(\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2)}. \quad (18)$$

У табл. 2 наведені результати обчислень для  $\mu = \frac{M_2}{M_1} = 1$  (рівні маси),  $a_1 = \frac{1}{2}L$ ;  $a_2 = L$ .

Таблиця 2

**Розраховані параметри**

$\gamma$	$\omega_1/A$	$\omega_2/A$	$\omega_2/\omega_1$
0	1,68	11,5	6,58
0,5	1,21	6,83	5,65
0,9	0,52	4,04	7,8

Очевидно, що в цьому випадку ( $a_2 = L$ ) при  $\gamma \rightarrow 1$  коефіцієнт  $\beta_{22} \rightarrow \infty$ , при цьому перша критична швидкість прямує до нуля.

**Висновки.** Запропонований спосіб дозволяє спростити процедуру наближеного визначення критичних значень кутових швидкостей обертання неоднорідних пружних валів з шарнірними або консольними опорами, що має важливе практичне значення.

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1968. 2. Зорий Л.М. Применение фундаментальных решений в задачах статики и динамики упругих систем с переменным распределением параметров. – Львов: ЛПИ, 1988. 3. Расчеты и испытания на прочность. Метод и программа расчета на ЭВМ устойчивости и малых колебаний прямолинейных стержней переменного сечения. Методические рекомендации МР 213-87. – М.: ВНИИНМАШ Госстандарта СССР, 1987. 4. Зорий Л.М. Метод частичной дискретизации в задачах динамики упругих систем с переменным распределением параметров // Всесоюз. конф. – М.: 1987. 5. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний. – М.: Высш. шк., 1975.

УДК 621.867

**В.М. Боровець, А.Л. Беспалов, В.С. Шенбор**

Національний університет “Львівська політехніка”,

кафедра автоматизації та комплексної механізації машинобудівної промисловості

**ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ ВІБРОКОМПРЕСОРА  
З ЕЛЕКТРОМАГНІТНИМ ВІБРОЗБУДНИКОМ**

© Боровець В.М., Беспалов А.Л., Шенбор В.С., 2008

**Розглянуто комплекс чинників, що впливають на продуктивність та ефективність роботи резонансних вібраційних компресорів з електромагнітними віброзбудниками, визначено основні зусилля, що діють на поршень компресора під час його роботи.**

**The complex of factors which influence on the productivity and efficiency of work of resonance oscillation compressors with electromagnetic vibroexciters is considered, certainly basic efforts which operate on the piston of compressor during his work.**

**Вступ.** Вібраційні компресори, що приводяться у дію електромагнітними віброзбудниками, найбільше розповсюджені у домашніх та промислових холодильниках, де доцільне створення невеликих газових потоків за середнього тиску подавання. Такі компресори працюють із частотою напруги живлення 50 Гц і здійснюють 3000 коливань за хвилину. Резонансний електромагнітний вібраційний компресор складається з таких основних елементів: електромагнітного віброзбудника, компресора, пружної системи та комплектуючих деталей (клапани, додаткова маса тощо).