Mathematical modeling of controlling chaos in the Cournot-Puu model of oligopoly

Bogdan Hnativ, Iryna Kavalets[1]

Applied Mathematics Department, Lviv Polytechnic National University, UKRAINE, Lviv, S. Bandery street 12,
[1]E-mail: ira.kavalets@gmail.com

Oligopoly, with a few firms in the market, is an intermediate structure between the two opposite cases of monopoly and perfect competition. The basic model of oligopoly was proposed by Cournot in 1838. Research reported suggested that a Cournot adjustment process of output might be chaotic if the reaction functions are non-monotonic. This result was purely mathematical without substantial economic implication until Puu [3] provided one kind of economic circumstances, i.s., iso-elastic demand with different constant marginal costs for the competitor, under which meaningful unimodal reaction functions were developed.

Unstable fluctuations have always been regarded as unfavorable phenomena in traditional economics. Because chaos means unpredictable events in the long time, it is considered to be harmful by decision-makers in the economy. Research on controlling chaos in economic models has already begun and several methods have been applied to the Cournot model, such as the OGY chaos control method, the pole placement method. These approaches reguire exact system information before their implementation. That meas, to make an accurate decision, the government or oligolists have to possess enormous amouts of relevant economic data, which is impractical or very costly. In contrast, the delayed feedback control (DFC) method [1] can be easily applied without requiring any system information.

The work includes a description of the economic model of oligopoly - a generalized model of Cournot-Puu. The implementation of delayed feedback control method to the economic model with four manufacturers on the market is considered; stability conditions of Cournot points are derived. The possible economic consequences of the considered chaos management strategies are described.

Математичне моделювання управління хаосом у моделі олігополії Курно-Пу

Богдан Гнатів, Ірина Кавалець[1]

Кафедра прикладної математики, Національний університет "Львівська політехніка", УКРАЇНА, м.Львів, вул.С.Бандери, 12,
[1]E-mail: ira.kavalets@gmail.com

Описано економічну модель олігополії – узагальнену модель Курно-Пу. Розглянуто застосування методу керування зі зворотнім зв'язком до моделі економіки з чотирма фірмами-виробниками на ринку; виведено умови стійкості точок рівноваги Курно. Описані можливі економічні наслідки розглянутих стратегій керування хаосом.

Ключові слова – олігополія, узагальнена модель Курно-Пу, керування хаосом, метод керування зі зворотнім зв'язком (DFC-метод).

I. Вступ

Нестабільні коливання завжди розглядались як несприятливе явище в традиційній економіці, оскільки вони породжують хаос, що означає непередбачувані події протягом тривалого часу. Олігополія з декількома фірмами на ринку є проміжною структурою між двома протилежними випадками: монополією і досконалою конкуренцією. В даній роботі розглянуто узагальнену модель олігополії Курно-Пу і введено поняття рівноваги Курно. Вагомим результатом тут є встановлення умов, за яких точка рівноваги є стійкою, та коли виникає хаос. Досліджено метод керування хаосом в економічній моделі (DFC-методу), коли на ринку є чотири фірми-виробники.

II. Узагальнена модель Курно-Пу

Позначимо фірми-олігополісти через F_1, F_2, …, F_n, обсяги випуску кожної складають $q_1, q_2, \ldots, q_n$ відповідно.

Припущення Курно (узагальнене). Кожна *i*-та (*i*=1,2,…,*n*) фірма-виробник очікує від свого *j*-конкурента (*j*=1,2,…,*n*, $j \neq i$) пропозиції такого обсягу продажу в поточний період, як і в попередньому періоді.

Згідно з цим припущенням, загальні функції реакції кожної з фірм будуть такими:

$$q_1(t+1) = f_1(q_2(t), q_3(t), \ldots, q_n(t)),$$
$$q_2(t+1) = f_2(q_1(t), q_3(t), \ldots, q_n(t)),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$q_n(t+1) = f_n(q_1(t), q_2(t), \ldots, q_{n-1}(t))$$

Припущення Пу 1 (узагальнене). Приймається, що ринковий попит є ізоеластичним, тобто ціна *p* відповідає повному попиту *q*, тобто $p = 1/q$.

Припущення Пу 2 (узагальнене). Товари є взаємозамінними так, що попит рівний постачанню, тобто $q = q_1 + q_2 + \ldots q_n$.

Припущення Пу 3 (узагальнене). Конкуренти мають сталі, але різні граничні витрати. Позначимо їх через $c_i,\ i = 1,\ldots n$.

Базуючись на цих припущеннях, функції реакції для фірм F_1, F_2, …, F_n, мають вигляд:

$$q_k(t+1) = \sqrt{\sum_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{q_i(t)}{c_k}} - \sum_{i=1, i\neq k}^{n} q_i(t),\ k = \overline{1,n}. \qquad (1)$$

Щоб знайти точки рівноваги, потрібно розв'язати систему (1). Ми отримаємо дві рівноважні точки: тривіальну $\underbrace{(0,0,\ldots,0)}_{n}$ і нетривіальну $\left(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*\right)$. Її значення можна записати у вигляді:

$$q_j^* = (n-1)\frac{-(n-2)c_j + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} c_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^2}, \quad j = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

III. Керування хаосом у моделі олігополії з чотирма виробниками

Тепер, після опису узагальненої моделі олігополії, перейдемо до розгляду методу керування хаосом, що може виникнути у ній. Надалі розглянемо застосування DFC-методу до структури (обсягу випуску фірми) моделі Курно-Пу на випадок чотирьох фірм-виробників на ринку.

Розглянемо таку керуючу форму моделі олігополії:

$$\begin{cases} q_1(t+1) = \sqrt{\dfrac{q_2(t)+q_3(t)+q_4(t)}{c_1}} - q_2(t) - q_3(t) - q_4(t), \\ q_2(t+1) = \sqrt{\dfrac{q_1(t)+q_3(t)+q_4(t)}{c_2}} - q_1(t) - q_3(t) - q_4(t) + \\ \qquad + u(t), \\ q_3(t+1) = \sqrt{\dfrac{q_1(t)+q_2(t)+q_4(t)}{c_3}} - q_1(t) - q_2(t) - q_4(t), \\ q_4(t+1) = \sqrt{\dfrac{q_1(t)+q_2(t)+q_3(t)}{c_4}} - q_1(t) - q_2(t) - q_3(t). \end{cases} \qquad (3)$$

$u(t)$ являє собою такий DFC-закон:

$$u(t) = K\left[q_2(t) - q_2(t-1)\right], \qquad (4)$$

де K – коефіцієнт зворотного зв'язку.

Оскільки система (3) нелінійна, тому, щоб дослідити, за яких умов керуючий закон (4) може стабілізувати хаос, треба її лінеаризувати в околі точки рівноваги $\left(q_1^*, q_2^*, q_3^*, q_4^*\right)$. Використаємо для цього метод малого параметра. Ввівши такі позначення $dq_i(t) = q_i(t) - q_i^*,\quad i = 1,2,3,4$ та

$$e_2(t) = q_2(t) - q_2(t-1) = dq_2(t) - dq_2(t-1),$$

перейдемо до системи рівнянь у відхиленнях. Лінеаризувавши отриману систему в околі рівноважної точки, отримаємо систему, яка в матричній формі має вигляд:

$$dq'(t+1) = P' \cdot dq'(t),$$

де

$$dq'(t+1) = \left(dq_1(t+1), dq_2(t+1), dq_3(t+1),\right.$$
$$\left. dq_4(t+1), e_2(t+1)\right)^T,$$
$$dq'(t) = \left(dq_1(t), dq_2(t), dq_3(t), dq_4(t), e_2(t)\right)^T.$$

P' – матриця вигляду:

$$P' = \begin{bmatrix} 0 & p_1 & p_1 & p_1 & 0 \\ p_2 & 0 & p_2 & p_2 & K \\ p_3 & p_3 & 0 & p_3 & 0 \\ p_4 & p_4 & p_4 & 0 & 0 \\ p_2 & -1 & p_2 & p_2 & K \end{bmatrix},$$

елементи якої мають вигляд:

$$p_k = \frac{-5c_k + \sum_{i=1, i\neq k}^{4} c_i}{6c_k}, \quad k = \overline{1,4}.$$

Ми отримали лінійну систему рівнянь, стійкість якої обумовлюється характеристичним рівнянням

$$\det(P' - lI) = 0. \qquad (5).$$

Точка рівноваги $\left(q_1^*, q_2^*, q_3^*, q_4^*\right)$ є асимптотично стійкою тоді і лише тоді, коли всі розв'язки характеристичного рівняння для l потрапляють в коло одиничного радіуса, тобто $|l| < 1$. Розв'язавши цю нерівність, ми отримаємо умови стійкості рівноважної точки.

Висновок

Описана стратегія може слугувати методом «індивідуального» контролю за хаосом, тобто фірма-виробник може самостійно стабілізувати хаотичний ринок, спостерігаючи за своїми обсягами виробництва в теперішньому і минулому періодах. В даному випадку це є фірма F_2, але, в результаті симетрії, ролі фірм можуть помінятись.

Література

[1] K. Pyragas. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. Phys. Lett. A 170 (6), 1992. – 421–428pp.

[2] T. Puu. Attractors, Bifurcations, and Chaos: Nonlinear Phenomena in Economics. Springer, New York, 2000.

[3] T. Puu. Chaos in duopoly pricing. Chaos Solitons Fractals 1 (6), 1991. – 573–581pp.