

ПРЕДСТАВЛЕННЯ КІНЕМАТИЧНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ В СИСТЕМАХ ЗОВНІШНЬОГО НАМОТУВАННЯ БАРАБАНАМИ У ФОРМІ ПРЯМОКУТНИКІВ З КРУГОВИМ СПРЯЖЕННЯМ КУТІВ

© Будзан В.І., Віннік В.М., Винник В.В., 2006

Наведено математичну модель намотувальної системи, що складається з двох барабанів прямокутного поперечного перерізу та спряженими прямими кутами та гнучкого елемента (нитки). У процесі намотування змінюється: довжина матеріалу між барабанами, радіуси-вектори точок набігання матеріалу на приймальний барабан та збігання його з віддавального барабана, кути між матеріалом та радіусами-векторами барабанів. Авторами одержані рівняння руху системи та зміни довжини нитки.

The paper presents the mathematical equations motion of the winding system that consists of the two square cross section coils. The main problem of this task consists in the system stiffness change that connected with the jumping-like change of the flexible element length. The equations of the mechanical system motion are obtained and the flexible element length change is described.

Постановка проблеми. Однією з численних механічних систем з кінематичним збудженням є намотувальний пристрій з некруглими віддавальним та приймальним барабанами. Конструктивне втілення такої системи різноманітне: від ланцюгової передачі з малою кількістю зубців до верстатів для намотування котушок з некруглими якорями. У цих системах зусилля динамічно змінюються як за неусталених, так і усталених режимах роботи, причому можливі руйнування або зміна якості гнучкого елемента.

Аналіз відомих досліджень і публікацій. Відомі математичні моделі намотувальних систем такого типу [1, 2] не зовсім коректні, коли розміри барабанів (радіус описаного кола або довжина більшої сторони прямокутника) співвимірні з міжцентровою віддаллю. Вони дають можливість проводити розрахунки для намотувальних систем, у яких міжцентрова відстань більш як у десять разів більша за довжину більшої сторони прямокутника поперечного перерізу барабана або якщо намотуваний матеріал має великий діаметр і є жорстким. Якщо геометричні параметри намотувальної системи співвідносяться так, як наведено у [3], то ці методика розрахунку дають похибку понад 10 %. Отже, є необхідність створення більш адекватних математичних моделей для таких систем.

Постановка задачі. Метою статті є розроблення на основі методики [4] математичної моделі намотувальної системи, що складається з двох барабанів прямокутного поперечного перерізу та спряженими прямими кутами і гнучкого елемента (нитки) як узагальненої моделі намотувальних систем з некруглими поперечними перерізами барабанів.

Основний матеріал. Діючи за методикою, викладеною в [4], розглянемо безперервне за часом представлення динамічних процесів у намотувальній системі, що складається з двох барабанів прямокутного поперечного перерізу з габаритними сторонами $2 a_j$, $2 b_j$ та радіусами спряження сторін r_{0j} .

Тут $i, j = 1, 2$ – нумерація барабанів.

Тоді, очевидно, радіус-вектори центрів кіл спряження $r_{cj} = \sqrt{(a_j - r_{0j})^2 + (b_j - r_{0j})^2}$. Схему системи зображено на рисунку.

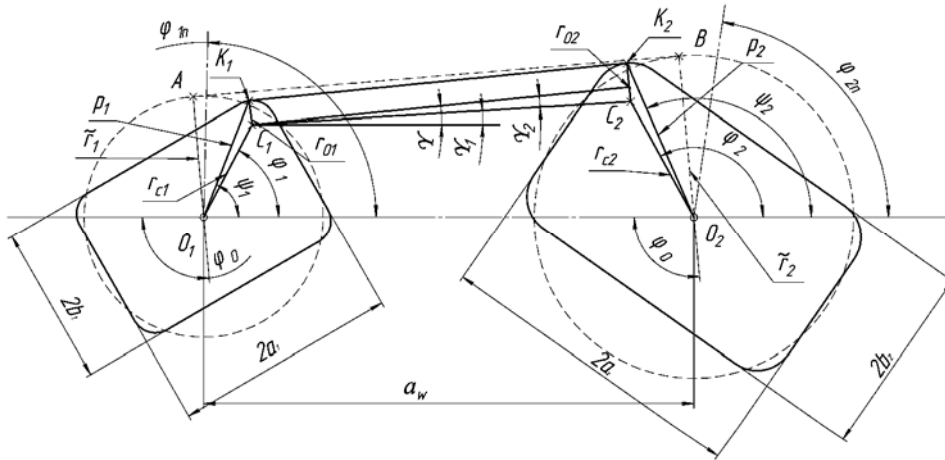


Рис. 1. Розрахункова схема намотувальної системи

Нехай φ_1 та φ_2 – кути положення радіус-векторів центрів спряження профілів барабанів, що відповідають контактним радіус-векторам (кути положення останніх ψ_1 та ψ_2). Отже, φ_1 та φ_2 залежать від кутів повороту барабанів Φ_1 та Φ_2 .

Як видно з рисунка, кути положення φ_j можна подати у формі

$$\psi_j = \psi_{ij} + \psi_{ji} - \psi_0 \quad i, j = 1, 2 \quad (1)$$

Тут першим індексом позначено номер відповідного барабана (веденого або ведучого), а другим – номер барабана, що є джерелом збурення, для кругового (з еквівалентним радіусом) іншого барабана; $\varphi_0 = \psi_0 = \arccos \frac{\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2}{\alpha_w}$ – кут положення контактних радіусів, якби система була

з барабанами кругових перерізів з еквівалентними радіусами; $\tilde{r}_j = \frac{2(a_j + b_j)}{\pi} - r_{0j}$ – еквівалентний радіус (радіус кола, довжина якого дорівнює периметру поперечного перерізу барабана).

За таких позначень α_w справедливі залежності

$$\tilde{r}_i - (r_{0j} + r_{cj} \cos(\varphi_j - \psi_{ij})) = (-1)^j \alpha_w \cos \psi_{ij}, \quad (2)$$

де α_w – міжцентрова відстань; \tilde{r}_i – еквівалентний радіус барабана; ψ_{ij} – кут положення контактного радіус-вектора ρ_i барабана для j -го барабана-збурювача.

Очевидно $\psi_{ij} = \varphi_{ij}$, якщо i -й барабан круглий.

Після розв'язання (2) відносно $\cos \psi_{ij}$ та $\sin \psi_{ij}$ встановлено: при $i \neq j$

$$\cos \psi_{ij} = \kappa_j^{-1} \left((\tilde{r}_i - r_{0j}) (r_{cj} \cos \varphi_j + (-1)^j \alpha_w) \pm \left((\kappa_j - (\tilde{r}_i - r_{0j})^2)^{\frac{1}{2}} r_{cj} \sin \varphi_j \right) \right) \quad (3)$$

$$\sin \psi_{ij} = (-1)^j \kappa_j^{-1} \left(-(\tilde{r}_i - r_{0j}) r_{cj} \sin \varphi_j \pm (r_{cj} \cos \varphi_j + (-1)^j \alpha_w) \left(\kappa_j - (\tilde{r}_i - r_{0j})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (4)$$

Тут при подвійних знаках „плюс” відповідає зовнішній намотувальній системі, “мінус” – внутрішній.

$$\kappa_j = \alpha_w^2 + r_{cj}^2 + (-1)^j 2\alpha_w r_{cj} \cos \varphi_j \quad (5)$$

З геометричних співвідношень встановлено

$$\cos \psi_{jj} = \frac{r_{cj} \cos \varphi_j + r_{0j} \cos \psi_{ij}}{\left(r_{cj}^2 - r_{0j}^2 + 2r_{0j} \tilde{r}_i - 2(-1)^j r_{0j} \alpha_w \cos \psi_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (6)$$

$$\sin \psi_{jj} = \frac{r_{cj} \sin \varphi_j + r_{0j} \sin \psi_{ij}}{\left(r_{cj}^2 - r_{0j}^2 + 2r_{0j} \tilde{r}_i - 2(-1)^j r_{0j} \alpha_w \cos \psi_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (7)$$

Аналізуючи ці вирази, можна встановити, що, нехтуючи величинами другого порядку малості, можна вважати

$$\varphi_j \approx \varphi_{jj} \quad (8)$$

Кути φ_{11} та φ_{22} залежать від їхніх початкових значень та кутів поворотів барабанів.

Нехай Φ_1 та Φ_2 – кути повороту першого та другого барабанів відповідно, φ_{jn} – кути початкового положення ведучого та веденого радіус-векторів центрів кіл спряження.

Якщо на початку руху точки контактів барабанів з матеріалом, що намотується, передують сторонам з габаритними розмірами $2d_j$, а прямують за сторонами $2q_j$ (очевидно d_j і q_j рівні a_j або b_j), то

$$\arccos \frac{d_j - \tilde{r}_i}{\alpha_w} + \arcsin \frac{d_j - r_{0j}}{r_{cj}} < \varphi_{jn} < \arccos \left(\pm \frac{q_j - \tilde{r}_i}{\alpha_w} \right) + \arcsin \frac{q_j - r_{0j}}{r_{cj}} \quad (9)$$

За таких позначень залежність між кутами повороту барабанів та кутами положення ведучого та веденого радіус-вектора має вигляд кусково-безперервної функції, змінної в трьох інтервалах

$$\begin{aligned} \varphi_j &= \Phi_j + \varphi_{jn} && \text{якщо } 0 < \Phi_j \leq \tilde{\Phi}_{j1} \\ \varphi_j &= \Phi_j + \varphi_{jn} - 2 \arccos \frac{d_j - r_{cj}}{\alpha_w} && \text{якщо } \tilde{\Phi}_{j1} < \Phi_j \leq \tilde{\Phi}_{j2} \\ \varphi_j &= \Phi_j + \varphi_{jn} - \pi && \text{якщо } \tilde{\Phi}_{j2} < \Phi_j \leq \pi \end{aligned} \quad (10)$$

Тут $\tilde{\Phi}$ – значення кутів поворотів барабанів, при яких відбувається „перескок” точок контакту намотувального матеріалу з барабанами.

$$\Phi_{j1} = \arccos \left(\pm \frac{q_j - \tilde{r}_i}{\alpha_w} \right) + \arcsin \frac{q_j - r_{0j}}{r_{cj}} - \Phi_n \quad (11)$$

У залежностях (9) та (11) знак “плюс” існує, коли $q_j \geq d_j$, а „мінус” – коли $d_j > q_j$.

$$\Phi_{j2} = \arccos \frac{d_j - \tilde{r}_i}{\alpha_w} + \arcsin \frac{d_j - r_{0j}}{r_{cj}} + \pi - \varphi_{jn} \quad (12)$$

Оскільки $\varphi_j \approx \varphi_{jj}$, періодичні значення потрібних для вираження параметрів системи тригонометричних функцій від φ_j можна подати у вигляді рядів Фур’є:

$$\cos \varphi_j \cong \frac{a_{0j}}{2} + \sum_{k=1}^n (a_{jk} \cos 2k\Phi_j + b_{jk} \sin 2k\Phi_j) \quad (13)$$

$$\sin \varphi_j \cong \frac{\tilde{a}_{0j}}{2} + \sum_{k=1}^n (\tilde{a}_{jk} \cos 2k\Phi_j + \tilde{b}_{jk} \sin 2k\Phi_j) \quad (14)$$

Коефіцієнти розкладу a_{jk} та b_{jk} знайдені після виразу $\cos \varphi_j$ та $\sin \varphi_j$ через (10) та відповідного перетворення:

$$a_{jk} = \frac{2}{\Pi} \left(\frac{(1-p_j^2)^{\frac{1}{2}}}{2k+1} \left((1-p_j^2)^{\frac{1}{2}} \sin((2k+1)\tilde{\Phi}_{j1} + \varphi_{jn}) + p_j \cos((2k+1)\tilde{\Phi}_{j1} + \varphi_{jn}) \right) + \right. \\ \left. + \frac{(1-p_j^2)^{\frac{1}{2}}}{2k-1} \left((1-p_j^2)^{\frac{1}{2}} \sin((2k-1)\tilde{\Phi}_{j1} - \varphi_{jn}) - p_j \cos((2k-1)\tilde{\Phi}_{j1} - \varphi_{jn}) \right) + \frac{P_j}{2k+1} \times \right. \\ \left(p_j \sin((2k+1)\tilde{\Phi}_{j2} + \varphi_{jn}) - (1-p_j^2)^{\frac{1}{2}} \cos((2k+1)\tilde{\Phi}_{j2} + \varphi_{jn}) \right) + \frac{P_j}{2k+1} \times \\ \left(p_j \sin((2k-1)\tilde{\Phi}_{j2} - \varphi_{jn}) + (1-p_j^2)^{\frac{1}{2}} \cos((2k-1)\tilde{\Phi}_{j2} - \varphi_{jn}) \right) \Bigg) \quad (15)$$

$$b_{jk} = -\frac{2}{\Pi} \left(\frac{(1-p_j^2)^{\frac{1}{2}}}{2k+1} \left((1-p_j^2)^{\frac{1}{2}} \cos((2k+1)\tilde{\Phi}_{j1} + \varphi_{jn}) + p_j \sin((2k+1)\tilde{\Phi}_{j1} + \varphi_{jn}) \right) + \right. \\ \left. + \frac{(1-p_j^2)^{\frac{1}{2}}}{2k-1} \left((1-p_j^2)^{\frac{1}{2}} \cos((2k-1)\tilde{\Phi}_{j1} - \varphi_{jn}) - p_j \sin((2k-1)\tilde{\Phi}_{j1} - \varphi_{jn}) \right) + \frac{P_j}{2k+1} \times \right. \\ \left(p_j \cos((2k+1)\tilde{\Phi}_{j2} + \varphi_{jn}) + (1-p_j^2)^{\frac{1}{2}} \sin((2k+1)\tilde{\Phi}_{j2} + \varphi_{jn}) \right) + \frac{P_j}{2k+1} \times \\ \left(p_j \cos((2k-1)\tilde{\Phi}_{j2} - \varphi_{jn}) - (1-p_j^2)^{\frac{1}{2}} \sin((2k-1)\tilde{\Phi}_{j2} - \varphi_{jn}) \right) \Bigg) \quad (16)$$

Тут і далі $p_j = \frac{d_j - r_{cj}}{\alpha_w}$.

З метою скорочення запису зазначимо: коефіцієнт розкладу \tilde{a}_{kj} дорівнює правій частині (16), якщо в ній змінити знак на “мінус” перед членом з $(2k-1)^{-1}$; коефіцієнт \tilde{b}_{kj} дорівнює правій частині (15), якщо в ній змінити знак на “мінус” перед членом з $(2k-1)^{-1}$.

За відомих значень $\cos \varphi_j$ та $\sin \varphi_j$ визначаються геометричні параметри намотувальної системи.

Довжина намотуваного матеріалу між барабанами

$$L = \left((r_{c2} \sin \varphi_{22} - r_{c1} \sin \varphi_{11})^2 + (\alpha_w + r_{c2} \cos \varphi_{22} - r_{c1} \cos \varphi_{11})^2 - (r_{02} - r_{01})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

може бути конкретизована після підстановки значень синусів та косинусів кутів φ_j .

Так, під час розкладу з точністю $k = 1$ довжину матеріалу подають у вигляді

$$L = L_0 + \Delta_0 + \Delta_1 \cos 2\Phi_1 + \Delta_2 \sin 2\Phi_1 + \Delta_3 \cos 2\Phi_2 + \Delta_4 \sin 2\Phi_2 \quad (18)$$

Тут $L_0 = (\alpha_w^2 - (r_2 - r_1)^2)$

$$\Delta_0 = \frac{(r_{c2} - r_{c1})(r_2 - r_1)}{L_0} - \frac{(r_{c2} - r_{c1})^2}{L_0} + \frac{(r_{c2} - r_{c1}) \sin \varphi_0}{2L_0} (r_{c2} \tilde{a}_{02} - r_{c1} \tilde{a}_{c1}) + \\ + \frac{\alpha_w + (r_{c2} - r_{c1}) \cos \varphi_0}{2L_0} (r_{c2} a_{02} - r_{c1} a_{c1}) \quad (19)$$

$$\Delta_1 = -\frac{r_{c1}}{L_0}(\alpha_w + (r_{c2} - r_{c1})\cos\varphi_0)a_{11} + (r_{c2} - r_{c1})\sin\varphi_0\tilde{a}_{11} \quad (20)$$

$$\Delta_2 = -\frac{r_{c1}}{L_0}(\alpha_w + (r_{c2} - r_{c1})\cos\varphi_0)b_{11} + (r_{c2} - r_{c1})\sin\varphi_0\tilde{b}_{11} \quad (21)$$

$$\Delta_3 = -\frac{r_{c2}}{L_0}(\alpha_w + (r_{c2} - r_{c1})\cos\varphi_0)a_{12} + (r_{c2} - r_{c1})\sin\varphi_0\tilde{a}_{12} \quad (22)$$

$$\Delta_4 = -\frac{r_{c2}}{L_0}(\alpha_w + (r_{c2} - r_{c1})\cos\varphi_0)b_{12} + (r_{c2} - r_{c1})\sin\varphi_0\tilde{b}_{12} \quad (23)$$

Кут нахилу матеріалу між барабанами до міжцентрової лінії знаходять з очевидних геометричних залежностей:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2, \quad (24)$$

де

$$\gamma_1 = \arccos\left(1 + \left(\frac{r_2 \sin\varphi_2 - r_1 \sin\varphi_1}{\alpha_w + r_2 \cos\varphi_2 - r_1 \cos\varphi_1}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (25)$$

$$\gamma_2 = \arcsin\left((r_{02} - r_{01})\left(\alpha_w + r_2 \cos\varphi_2 - r_1 \cos\varphi_1\right)^2 + (r_2 \sin\varphi_2 - r_1 \sin\varphi_1)^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (26)$$

Підставимо значення γ_1 і γ_2 в (24) та розкладемо значення $\sin\gamma$ та $\cos\gamma$ в ряд Тейлора за функціями $\sin\varphi$ та $\cos\varphi$ в околицях їх значень для еквівалентної кругової намотувальної системи

$$\left(\cos\varphi_0 = \frac{\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1}{\alpha_w}; \sin\varphi_0 = \left(1 - \left(\frac{\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1}{\alpha_w}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Після надзвичайно громіздких перетворень значення $\sin\gamma$ та $\cos\gamma$ з точністю до величин другого порядку малості подають залежностями:

$$\sin\gamma = \sin\tilde{\gamma} + \frac{R}{\sin\varphi_0}((r_2 - r_1)\cos 2\varphi_0 + r_1 \cos(\varphi_1 + \varphi_0) - r_2 \cos(\varphi_2 + \varphi_0)) \quad (27)$$

$$\cos\gamma = \cos\tilde{\gamma} - tg\tilde{\gamma} \frac{R}{\sin\varphi_0}((r_2 - r_1)\cos 2\varphi_0 + r_1 \cos(\varphi_1 + \varphi_0) - r_2 \cos(\varphi_2 + \varphi_0)) \quad (28)$$

Тут $\tilde{\gamma}$ – значення кута γ при $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 = \sin\varphi_0$ та $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 = \cos\varphi_0$.

$$\sin\tilde{\gamma} = (\alpha_w l_y)^{-1} \left((r_2 - r_1) \left(\alpha_w^2 - (\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(l_y^2 - (r_{02} - r_{01})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + (r_{02} - r_{01}) \left(\alpha_w^2 - (r_2 - r_1)(\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1) \right) \right) \quad (29)$$

$$\cos\tilde{\gamma} = (\alpha_w l_y)^{-1} \left(\left(l_y^2 - (r_{02} - r_{01})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\alpha_w^2 - (r_2 - r_1)(\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1) \right) + (r_{02} - r_{01})(r_2 - r_1) \left(\alpha_w^2 - (\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (30)$$

$$l_y = \left(\alpha_w^2 + (r_2 - r_1)^2 - 2(r_2 - r_1)(\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (31)$$

$$R = (\alpha_w^2 l_y^4)^{-1} \left(\left(\alpha_w^2 - (r_2 - r_1)(\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1) \right)^2 \left(l_y^2 - (r_{02} - r_{01})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\alpha_w^2 - (r_2 - r_1)(\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1)}{\alpha_w} \right) + \left((r_2 - r_1)^2 (r_{02} - r_{01})^2 \left(\alpha_w^2 - (\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\alpha_w^2 - (r_2 - r_1)^2}{l_y^2 - (r_{02} - r_{01})^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\alpha_w^2 + (r_2 - r_1)(\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1)}{(r_2 - r_1)(r_{02} - r_{01})} \right) \quad (32)$$

З (27) та (28) після підстановки значень φ_1 та φ_2 знаходять вирази тригонометричних параметрів кута нахилу матеріалу між барабанами як функції кутів повороту останніх.

Як наслідок, і динамічні параметри системи можна подати у вигляді безперервних за кутами повороту барабанів функцій:

$$T_1 = J_1 \frac{d^2 \Phi_1}{dt^2} - F(r_{01} + r_1 \sin(\varphi_1 - \gamma)) \quad (33)$$

$$F(r_{02} + r_2 \sin(\varphi_2 - \gamma)) = J_2 \frac{d^2 \Phi_2}{dt^2} + T_2 \quad (34)$$

Тут використано прийняті в [1] позначення: J_j – моменти інерції барабанів; T_j – крутні моменти, прикладені до барабанів; F – зусилля натягу матеріалу, що надалі виражається через його деформацію.

Висновки. Отже, одержане безперервне математичне представлення динамічної намотувальної системи з кусково-безперервними параметрами. Модель перевіряли за крайнього стану, коли поперечний переріз барабана має форму круга; одержані залежності набули класичного вигляду і стали повністю адекватними для намотувальної системи з циліндричними барабанами.

1. Парнес М.Г. *Расчет и конструирование намоточных станков.* – М., 1975. 2. Скороходов Е.А., Билибин К.И. *Механизация и автоматизация производства обмоток электроэлементов.* – М., 1978. 3. Будзан В.І. *Обґрунтування параметрів натяжної частини експериментальної установки для дослідження відкритої намотувальної системи з компенсатором* // *Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”.* – 2001. – № 434. – С. 10–15. 4. Будзан В.І., Віннік В.М. *Методика знаходження силових та кінематичних співвідношень у намотувальних системах з двома некруглими барабанами* // *Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”.* – 2005. – № 539. – С. 8–12

УДК 621.01:621-868

О.В. Гаврильченко, О.С. Ланець, В.М. Гурський, Я.В. Шпак
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра автоматизації та комплексної механізації
машинобудівної промисловості

ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРЕХІДНОГО РЕЖИМУ РОБОТИ ВІБРАЦІЙНОЇ МАШИНИ З ПРОСТОРОВИМ РУХОМ РОБОЧОГО ОРГАНУ, СТВОРЕНОЇ НА ОСНОВІ ТЕОРІЇ СИНФАЗНИХ КОЛИВАНЬ

© Гаврильченко О.В., Ланець О.С., Гурський В.М., Шпак Я.В., 2006

Проаналізовано амплітудно-частотні характеристики тримасової коливальної системи вібраційної машини об'ємної обробки з електромагнітним приводом. Розглянуто перехідний режим роботи до усталеного синфазного руху, побудовано фазові портрети системи для перехідного та усталеного режимів роботи.

This article describes the analysis of – frequency descriptions of peaks of the vibratory machine of volumetric processing with electromagnetic vibrator. Transient behavior of work is considered to a withstand co – phase motion. The portraits of phases of the system are built for transient and withstand behaviors of work.

Вступ. Вібраційне обладнання з коловими електромагнітними вібраторами та просторовим рухом робочого органу [1] можна використати як для механічної обробки деталей