УДК 519.17

С. В. Бабич, Ю. В. Турбал
Національний університет водного господарства та природокористування,
кафедра прикладної математики

МЕТОДИ ФОРМУВАННЯ МАТРИЦЬ РОЗКЛАДІВ НА ОСНОВІ МОДИФІКОВАНИХ ПЕРМАНЕНТ

Запропоновано методику аналізу матриць розкладів для задачі календарного планування, що ґрунтується на застосуванні певних модифікацій перманент. Як основу методу побудови розкладу пропонується використати системи різних представників конфігурацій та алгоритм їх формування на основі розкладу перманент за рядком.

Ключові слова: розклад, задачі календарного планування, конфігураційний підхід, перманент матриці.

In this article is proposed the technique of schedule matrices analysis for scheduling task based on the certain modifications of permanent. The proposed method of schedule construction use various configurations and representatives of their formation and algorithm based on permanent schedule by line.

Key words: scheduling, task scheduling, configuration approach, permanent matrix.

Вступ

Незважаючи на те, що існує низка підходів до розв’язання задач календарного планування, зокрема, задач складання розкладу занять, вони і сьогодні актуальні, зважаючи на їхню багатокритеріальність та обчислювальну складність. Адже знаходження оптимальних розв’язків у різних класах критеріїв потребує на практиці значних обчислювальних ресурсів. Специфікою проблеми складання розкладу занять навчального закладу, очевидно, є її багатокритеріальність. За думкою Р. Дехтер [1], мережі обмежень є графовим представленням, що використовується для пошуку стратегій розв’язання задач.

Сьогодні вже сформувалась теорія розкладів, яка широко застосовується як для організації роботи підприємств, так і для побудови розкладів у навчальних закладах та містить низку специфічних підходів. Також ця проблематика перетинається з розділом динамічного програмування в теорії управління та теорії обчислювальних систем [2]. У цій роботі пропонується новий конфігураційний підхід до розв’язання задач календарного планування, що дає змогу врахувати низку критеріїв, які повинен задовольняти розклад, під час динамічного формування матриць розкладів.

Аналіз літературних даних та постановка проблеми

С. В. Давидов вказав на складність алгоритмів побудови розкладів (NP-повні задачі), запропонувавши вирішення методом, наближеним до точного для певного критерію оптимальності, оскільки виконання завдань побудови розкладів методом перебору, як і перебору з поверненням, не ефективне [3]. Тому в сучасних наукових працях перевагу надають евристичним підходам [4], адже реальні розміри отриманих задач поки не дозволяють практично розв’язати їх наявними точними методами для задач квадратичного програмування. У роботі [5] Г. А. Попов розглядає модель задачі побудови навчального розкладу у вигляді чотиривимірної матриці елементів $x_{psad} = \{1, 0\}$, де в індексах описано пари, підгрупи, аудиторії та дисципліни відповідно. Застосовуючи сукупність пріоритетних вимог різних рівнів (критерії та обмеження), отримують елементи можливості "1" або неможливості проведення пари "0". Очевидно, що розв'язання задач календарного планування в межах зазначених вище підходів пов'язане зі значними обчислювальними складнощами, що робить актуальними підходи, які дають змогу істотно зменшити потужність допустимого простору (кількість варіантів вибору) під час розв'язання таких задач.

Об`єкт, мета та завдання дослідження

У роботі пропонується новий конфігураційний підхід до аналізу матриць розкладів, в основу якого покладено комбінаторні властивості алгебраїчних структур, зокрема перманент.

Усім добре відомі критерії, які повинен задовольняти розклад занять: студенти не повинні мати "вікон", викладачі також, кількість робочих днів викладача повинна бути мінімальною, побажання викладачів повинні враховуватись максимально тощо [5]. Очевидно, що оптимальний у певному розумінні розклад є найкращим варіантом для кожного дня навчального тижня. Тому обмежимося розглядом одного робочого дня.

Якщо кожному викладачу поставити у відповідність певне натуральне число (номер, вагу, тощо), то розклад являтиме собою матрицю розмірності $3 \times n$, де 3 – кількість пар, n – кількість груп (підгруп), для яких складають розклад. Називатимемо таку матрицю "матрицею розкладу" і позначатимемо *R*. Очевидно, що під час аналізу матриць розкладу виникає низка задач, які пов'язані з вимогами до самого розкладу занять. У цій роботі поставлено завдання розробити критерії допустимості матриць розкладу, зокрема такі, що основані на спеціально введених матрицях інцидентності конфігурацій та теорії перманент, а також розглянути алгоритмічні аспекти побудови допустимих матриць розкладів на основі систем різних представників множин, що утворюють "стовпчики" вихідних матриць.

Метою нашої роботи є розроблення нової методики аналізу матриць розкладів для задачі календарного планування, що ґрунтується на застосуванні певних модифікацій перманент матриць інцидентності.

Матеріали та методи досліджень матриць розкладу на основі теорії модифікованих перманент

Конфігурації розкладу

Тернарною конфігурацією розкладу, утвореною елементом матриці розкладу *d*, будемо називати множину елементів матриці *R*, таких, що $\alpha_{ij} = \alpha_{kl} = \alpha_{mp} = d$, *i, k, m* ϵ {1, 2, 3}, $1 \le j$, $p \le n$. Аналогічно можемо ввести поняття бінарних та унарних конфігурацій (бінарна конфігурація не може бути елементом тернарної). Природною для тернарної конфігурації є умова, коли $i \ne k \ne m$ (викладач не може проводити кілька пар одночасно). Аналогічна умова ставиться і для бінарної конфігурації. Тобто матриця розкладів являє собою сукупність тернарних, бінарних, унарних конфігурацій та нулів (нуль означає, що пари немає). Очевидно, що набір конфігурацій повинен бути таким, щоб матриця розкладу взагалі могла утворитись (в одній групі повинно бути не більше від трьох пар на день). Матрицю розкладу називатимемо допустимою, якщо в рядку немає двох однакових елементів.

Очевидно, що за наявності потоків матриця розкладу може бути недопустимою. Розглянемо, наприклад, матрицю виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Вважатимемо, що одиниці в першому рядку та четвірки у другому відповідають потокам. Ця матриця не має допустимої форми. Справді, ця матриця має чотири тернарні конфігурації, утворені елементами 1, 2, 3, 4, та одну бінарну, утворену елементом 5. У допустимій формі обов'язково має бути по одному представнику кожної тернарної конфігурацій в кожному рядку, крім того, два рядки мають по одному представнику тернарних та бінарної. Загалом стовпчиків – 6. Але в цьому прикладі взагалі неможливо утворити рядок, який містив би елементи 1, 2, 3, 4 та 5. Справді, якщо одиниця чи четвірка є поточними, то три з шести елементів "зайняті". А необхідно записати ще чотири різні елементи. Якщо ж вибрати всі представники, що не є "поточними" (така ситуація для цієї матриці можлива, можна сформувати рядок, наприклад, 3, 1, 4, 5, 2), то не можемо уникнути збігу, оскільки в матриці немає жодного унарного елемента.

Розглянемо спочатку загальний підхід, що ґрунтується на побудові систем різних представників стовпчиків. Під системою різних представників стовпчиків (СРПС) розумітимемо множину, утворену елементами стовпчиків, у якій всі елементи стовпчиків різні, за винятком потокових елементів. Вибір потокового елемента з якогось стовпчика передбачає автоматичний його вибір з усіх інших стовпчиків, де є відповідний потік.

Допустима форма матриці розкладу

Сформулюємо критерій існування допустимої форми матриці денного розкладу.

Очевидним є просте твердження:

Твердження 0. *Матриця денного розкладу R має допустиму форму тоді і тільки тоді, коли існує така система різних представників стовпчиків a , що R/a має деяку СРПС b, і R/a/b є СРПС (операція теоретико-множинного віднімання реалізується "за стовпчиками").*

Справді, нехай матриця A має допустиму форму. Тоді немає збігу жодних двох елементів у рядках матриці. Але це означає, що всі рядки є СРПС і умова твердження виконується. Нехай виконується умова твердження. Але тоді можемо утворити матрицю, рядками якої є α, β та $A/\alpha/\beta$. Очевидно, що ця матриця збігається з вихідною за множинами елементів стовпчиків.

Надалі необхідно модифікувати матрицю інцидентності а також ввести поняття модифікованого перманента**.**

Для представлення матриці розкладу, що містить потоки, введемо поняття матриці інцидентності конфігурацій. Нехай маємо довільну матрицю денного розкладу розмірністю 3xn. Розглянемо стовпчики матриці розкладу $R_1, R_2, \dots R_n$. Модифікована матриця інцидентності будується таким способом. По горизонталі ставлять номери викладачів, по вертикалі – групи, у яких проводяться заняття. Кожному викладачеві ставиться у відповідність стовпчик матриці, у якому записують нулі та одинички залежно від того, чи має викладач пари у відповідних групах. Причому якщо якийсь викладач x має поточну пару, то виділяємо йому окремий стовпчик матриці інцидентності, позначивши його x^p (можна використовувати індекс, що є кількістю елементів потоку). Отже, утворюється матриця виду:

$$A=\begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_m \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}, \quad (2)$$

де $\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{коли } x_i \in R_j, \\ 0 \text{ в інакшому випадку.} \end{cases}$.

Наприклад, для матриці розкладів виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

отримуємо таку матрицю інцидентності:

$$\begin{pmatrix} & 1 & 1^p & 2 & 3 & 4 & 4^p & 5 \\ R_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ R_2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ R_3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ R_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ R_5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ R_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

де 1^p та 4^p – індекси відповідних викладачів, що мають "поточні" пари.

Означення: *модифікованим перманентом матриці інцидентності називатимемо суму всіх можливих добутків елементів матриці, кожен з яких містить по одному елементу з кожного рядка та з різних стовпчиків, причому елемент потокового стовпчика (стовпчика, що відповідає потоковому елементу) не може бути в добутку разом з елементами інших рядків, що відповідають цьому ж потоку.*

Зауважимо, що за відсутності потокових елементів модифікований перманент є звичайним перманентом.

Для знаходження модифікованого перманента матриці інцидентності можемо використовувати розклад за рядком. Згідно з означенням, процедура розкладу буде такою: ненульовий елемент рядка множиться на модифікований перманент матриці, утвореної за такими правилами: якщо елемент рядка належить потоковому стовпчику, то матриця утворюється з вихідної викреслюванням стовпчика, у якому цей елемент міститься, та всіх рядків, що відповідають всім елементам цього потоку. Якщо елемент рядка не належить потоковому стовпчику, то матриця утворюється викреслюванням рядка та стовпчика, де стоїть цей елемент, а також всіх потокових стовпчиків, на перетині яких з цим рядком стоять ненульові елементи. Відзначимо й те, що вилучення всіх наявних елементів дасть у кінцевому результаті одиницю.

Розглянемо процедуру обчислення модифікованого перманента для матриці розкладів (3). Маємо матрицю виду:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Розраховуючи перманент, будуватимемо розклад за першим рядком (потокові стовпчики 2-й та 4-й):

$$\mathrm{permod}A = 1*\mathrm{permod}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 1*\mathrm{permod}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 1*\mathrm{permod}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Далі процедура розкладу здійснюється аналогічно.

Твердження 1. *Матриця розкладів має СРПС тоді й тільки тоді, коли модифікований перманент матриці інцидентності відмінний від нуля.*

Доведення

Нехай маємо матрицю розкладів розмірності 3xn та існує СРПС матриці розкладів $x^1, x^2,\ldots, x_n$. Тоді, побудувавши матрицю інцидентності, бачимо, що перманент матриці відмінний від нуля, оскільки перманент матриці, утвореної стовпчиками, що відповідають елементам $x^1, x^2,\ldots, x_n$, є одиницею:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & \cdots & x_n \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Наявність потокових елементів не погіршує ситуацію. Якщо, наприклад, $x^1=x^2$, а інші елементи різні, то маємо матрицю інцидентності:

$$\begin{pmatrix} x_1^p & x_2 & \cdots & \cdots & x_n \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

модифікований перманент якої теж, очевидно, є одиницею.

Нехай модифікований перманент матриці інцидентності відмінний від нуля. Тоді в його розкладі є одиничний елемент, тобто перманент деякої матриці, утвореної підсистемою стовпчиків, що дорівнює 1. Але якщо розглянути елементи, що відповідають стовпчикам цієї підсистеми, то неважко побачити, що вони утворюють СРПС. Твердження доведене.

Процедура формування системи різних представників стовпчиків

Доведення попереднього твердження теореми наштовхує на думку, що під час розкладу модифікованого перманента матриці інцидентності конфігурацій стовпчиків за рядком легко побудувати всі можливі СРПС. Кожній СПРС відповідає підматриця матриці інцидентності з одиничним перманентом. Крім того, саму СПРС можна отримати, якщо ввести процес "запам'ятовування" елемента стовпчика, що відповідає одиниці, яка використовується для побудови добутку в цей момент та рядка, в якому ця одиниця стоїть у вихідній матриці інцидентності. У зв'язку з цим, обчислюючи перманент, кожній одиничці дописуватимемо два індекси: верхній – елемент, що відповідає стовпчику, де стоїть ця одиничка, нижній – номер рядка, в якому ця одиниця стоїть у вихідній матриці.

Нехай, наприклад, маємо матрицю розкладу виду:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Тоді матриця інцидентності має вигляд:

$$\begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1^n & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Побудуємо розклад модифікованого перманента із "запам'ятовуванням" за першим рядком:

$$\begin{aligned} &\mathrm{per}\,mod \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1_1^{1^p} * 1 + 1_1^2 * per\,\mathrm{mod} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \cdots + 1_1^3 * \\ &\mathrm{per}\,mod \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1_1^{1^n} * 1 + 1_1^2 * \left(1_2^1\, \mathrm{per}\,mod \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} + 1_2^3\, \mathrm{per}\,mod \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\right) + \cdots \\ &+ 1_1^3 1_2^1 per\,\mathrm{mod} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = 1_1^{1^n} + 1_1^2\, 1_2^1 1_3^4 + 1_1^2 1_2^3 1_3^1 + 1_1^2 1_2^3 1_3^4 + 1_1^3 1_2^1 1_3^4. \end{aligned} \tag{11}$$

Бачимо, що модифікований перманент дорівнює 5 (це і є кількість всіх можливих СРПС). Крім того, відомі й самі СРПС. Їх записують як верхні індекси "одиничок". Причому, якщо певні нижні індекси відсутні, то відповідну кількість разів повторюється верхній елемент (ситуація потокового елемента): *111, 214, 231, 234, 314.*

За наявності всіх можливих СПРС допустиме розв'язання задач різних класів. Наприклад, якщо нас цікавить допустима форма матриці розкладу, то вона існує лише за умови, коли у множині всіх СПРС є такі три СПРС, що не містять в собі на однакових місцях однакових елементів, окрім елементів потоків. Для цього прикладу існує тільки один набір СРПС: *111, 314, 231.*

Формування допустимої матриці розкладу на основі СРПС

Отже, формуватимемо допустиму матрицю поетапно, утворюючи перший, другий, третій рядки (і т.д.), переставляючи елементи стовпчиків. Для того, щоб був сформований перший рядок допустимої матриці розкладу, необхідно, щоб конфігурація множин стовпчиків $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ містила систему різних представників (СРП). Але СРП існує тоді й тільки тоді, коли перманент матриці інцидентності конфігурації відмінний від нуля. Отже, розглядатимемо перманент матриці А. Якщо він відмінний від нуля, то існує СРП: $a11, a12, \dots, a1n$. Ця СРП утворює перший рядок допустимої матриці розкладу. Для того, щоб сформувати другий рядок допустимої матриці, необхідно, щоб існувала СРП конфігурацій множин $\left\{\frac{R1}{a11}, \frac{R2}{a12}, \dots \frac{Rn}{a1n}\right\}$, де $a11, a12, \dots, a1n$ – перший рядок допустимої матриці розкладу. Відповідні міркування продовжуємо.

Зауважимо, що початковий процес формування конфігурацій може бути або автоматичним, з міркувань мінімальності кількості робочих днів викладача, або являти собою результат домовленості з викладачем (наприклад, деяким викладачам важко проводити три пари за один день, тоді можна утворити відповідні бінарні чи навіть унарні конфігурації, якщо такі усіх влаштовують). За такого підходу вирішується проблема мінімізації “вікон” викладачів вже на початковому етапі розв’язання задачі: матриця розкладу являє собою набір вже оптимізованих (що не мають вікон) конфігурацій.

Висновок

У роботі запропоновано новий підхід до розв’язання задач календарного планування, що ґрунтується на поняттях конфігурацій та матриць розкладів. Визначено критерій існування системи різних представників матриць розкладів на основі введених певних модифікацій перманент матриць інцидентності. Запропоновано спеціальну процедуру побудови системи різних представників множин, що утворюють стовпчики матриці розкладів. Отримані теоретичні результати можуть бути підґрунтям для розроблення автоматизованої системи для складання розкладу занять, а також розв’язання інших задач теорії розкладів.

1. Dechter R. Constraint Processing / R. Dechter – Kaufmann, 2003. – 481 p. 2. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. – 400 с. 3. Давыдов С. В. Система автоматического построения расписания учебных занятий. – М., 1999. – 320 с. 4. Кузьмичев А. Б. О подходе к автоматизации составления расписания в учебном заведении / А. Б. Кузьмичев // Техника машиностроения. – 2014. – № 3. – С. 23–26. 5. Попов Г. А. Формализация задачи составления учебного расписания в высшем учебном заведении // Астрахань, Вестник АГТУ. – 2006. – № 1(30). 6. Конвей Р. В. Теория расписаний / Р. В. Конвей, В. Л. Максвелл, Л. В. Миллер. – М.: Наука, 1975. – 389 с. 7. Танаев В. С. Теория расписаний. Одностадийные системы / В. С. Танаев, В. С. Гордон, Я. М. Шафранский. – М.: Наука, 1984. – 345 с.