Неравенства. / Э. Беккенбах, Р.М Беллман.//М:Мир, 1965 – 276с. 3. Mitrinovic D.S. Analytic Inequalities. / D.S. Mitrinovic// New York.: Springer-Verlag, , 1970 – 400p. 4. Pachpatte B.G. Integral and Finite Difference Inequalities and Applications. /B.G. Pachpatte // North-Holland Mathematics Studies, Vol. 205 Elsevier Science, Amsterdam, 2006 – 310p. 5. Pachpatte B.G. Inequalities for Differential and Integral Equations./ B.G. Pachpatte // Academic Press, New York, 1998 – 612p. 6. Филатов А.Н. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний./ А.Н. Филатов , Л.В. Шарова // – М.: Наука, 1976 –152с. 7. Ashyralyev A. Note on the Integral Inequalities with Two Dependent Limits. / A. Ashyralyev, E. Misirli, O. Mogol // Journal of Inequalities and Applications Vol. 2010, Article ID 430512, 18 pages. 8. Tsymbal V.M. On the Integral Inequalities with Two Dependent Limits / V.M.Tsymbal// Матеріали 16 Всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». 6-7 жовтня 2011 р. Львів. С. 15. 9. Цимбал В.М. Деякі інтегральні нерівності / В.М. Цимбал// Збірник тез 8 науково-технічної конференції науково-педагогічних працівників «Проблеми та перспективи розвитку економіки і підприємництва та комп'ютерних технологій в Україні», 26-31 березня 2012 р. -Львів, 2012, С. 303. 10. Tsymbal V. On some integral inequalities. / V. Tsymbal// Матеріали 19 Всеукраїнської нукової конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». 3 – 4 жовтня 2013 р. Львів. С. 19.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА-СТІЛТЬЄСА У МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЯХ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ. ЗБІЖНІСТЬ ІНТЕГРАЛУ ЛАПЛАСА-СТІЛТЬЄСА

Задорожна О.Ю., Джавала Л.Л.

Національний університет "Львівська Політехніка"

Перетворення Лапласа – Стілтьєса (далі – L-St) займає одне з центральних місць в арсеналі математичних засобів, що дозволяють досліджувати найважливіші операційні характеристики стаціонарних випадкових процесів.

Нехай функція $F(x)$ визначена на $(-\infty,+\infty)$, $F(x)=0$ при $x<0$, $F(x)$ є функцією обмеженої варіації на кожному скінченному проміжку $[0,T]$ та виконується нерівність $|F(x)|\le Me^{s_0 x}$ $(x>0)$ для

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

деяких сталих $M > 0$, $s_0 > 0$. Тоді перетворенням L-St $I(s)$ від функції $F(x)$ називається функція $I(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} dF(x), x \in C$.

Наведемо деякі математичні моделі, де фігурує перетворення L-St.

Модель 1. ([1]) Нехай $F(x) = P\{\xi \le x\}$ – ФР (функція розподілу) деякої в.в. (випадкової величини) $\xi > 0$. Тоді $I(s) = M(e^{-s\xi})$ має сенс математичного сподівання. Якщо ж s – чисто уявна змінна, то перетворення L-St співпадає з характеристичною функцією розподілу $F(x)$.

Модель 2. ([2]) Нехай $F(x)$ – ФР в.в. ξ, що дорівнює тривалості деякого процесу. Одночасно з спостеріганням цього процесу будемо аналізувати настання деяких штучних подій (катастроф), що не залежать від "головного процесу". Припустимо, що інтервали τ між моментами настання таких подій незалежні і розподілені експоненціально з одним і тим же параметром $s > 0$, тобто $P\{\tau < x\} = 1 - e^{-sx}$, $x > 0$. Тоді для ймовірності $P\{\tau > \xi\}$ того, що за випадковий час $\boldsymbol{\xi}$ не настане жодної катастрофи має місце формула

$$P\{\tau > \xi\} = \int_0^{+\infty} e^{-sx} dF(x).$$

Модель 3. ([3]) Нехай на часовій осі деякий момент часу вибраний за 0 і нехай $t_1, t_2, \ldots t_i > 0$ – моменти настання подій. Позначимо $\tau_1 = t_1, \tau_n = t_n - t_{n-1}$ – довжини інтервалів між моментами настання всіх подій. Відзначимо принципову відмінність τ_1 від інших τ_n : якщо τ_n, $n \ge 2$ відраховується від моменту настання попередньої події, то τ_1 відраховується від нуля на часовій осі.

Випадковий потік називається потоком з обмеженою післядією (надалі – ПзОП), якщо $\{\tau_n\}$ – незалежні випадкові величини.

Зміст слів "обмежена післядія": майбутня поведінка потоку після моменту часу $t \in (t_n, t_{n+1})$ залежить лише від кінцевої величини $(t - t_n)$, а від інших подій у минулому не залежить. Для опису ПзОП достатньо задати функції розподілу $F_k(x) = P\{\tau_k < x\}$, $k \ge 1$.

ПзОП, для якого $F_k(x) = F(x)$, $k \ge 2$, називається потоком відновлення. Нехай N_t – кількість подій, що настали на інтервалі $(0, t)$. Функція $H(t) = M(N_t)$ називається функцією відновлення. Ця функція задовольняє рівняння $H(t) = F_1(t) + \int_0^t H(t - x) dF(x)$, яке розв'язується саме з допомогою перетворення L-St.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Модель 4. ([1]) Розглянемо однолінійну СМО з очікуванням, на вхід якої поступає найпростіший потік інтенсивності λ, а час обслуговування заявки є в.в. з ФР $F(t)$, перетворення L-St якої $I(s)$. Нехай t_k – момент закінчення обслуговування в системі $k-$ї заявки. Процес $i_{t_k}, k \geq 1$ є однорідним ланцюгом Маркова з дискретним часом.

Нехай в деякий момент закінчення обслуговування запиту t_k кількість запитів i_{t_k} в системі дорівнює $i, i > 0$. Оскільки в момент часу t_k кількість запитів в системі має стрибок, то вважаємо, що $i_{t_k} = i_{t_k+0}$, тобто заявка, яка покидає систему уже не зараховується. Оскільки $i > 0$, то для обслуговування негайно вибирається наступна заявка, яка покидає систему у момент закінчення обслуговування запиту t_{k+1}. Тому для того, щоб в момент t_{k+1} в системі залишилось j запитів, необхідно, щоб за інтервал часу (t_k, t_{k+1}) в систему поступило $j-i+1$ запитів. Ймовірність цієї події f_{j-i+1} знаходиться з формули $f_l = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^l}{l!} e^{-\lambda t} dF(t), l \geq 0.$ Зауважимо, що у цій формулі фігурує додатковий підінтегральний множник $f(t) = \frac{(\lambda t)^l}{l!}$.

Нами розглядаються інтеграли Лапласа – Стілтьєса більш загального вигляду із множником $f(t)$ довільного вигляду.

Нехай L – клас невід'ємних, неспадних на $[0,+\infty)$ функцій, dF – міра Лебега-Стілтьєса, породжена функцією $F \in L$, а f – невід'ємна, визначена на $[0,+\infty)$ dF – вимірна функція. Розглянемо інтеграл Лапласа – Стілтьєса вигляду $I(\sigma) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{\sigma x} dF(x), \ \sigma \in R.$ (1)

Говоритимемо, що інтеграл (1) збіжний у точці $\sigma \in R$, якщо $I(\sigma) < +\infty$ та розбіжний якщо $I(\sigma) = +\infty$. Число $\sigma_{зб} \in R$ називатимемо абсцисою збіжності інтегралу (1), якщо він збіжних для всіх $\sigma < \sigma_{зб}$ і розбіжний для всіх $\sigma > \sigma_{зб}$. Якщо інтеграл збіжний для всіх $\sigma \in R$, то покладемо $\sigma_{зб} = +\infty$, якщо ж він розбіжний для всіх $\sigma \in R$, то покладемо $\sigma_{зб} = -\infty$. Позначимо $S = \operatorname{supp} dF \cap \operatorname{supp} f$, де $\operatorname{supp} dF$ та $\operatorname{supp} f$ означають носій міри dF та носій функції f відповідно.

Твердження. а) якщо функція $F \in L$ необмежена, то

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

$$\lim_{h\to 1+0}\varliminf_{\substack{x\to+\infty\\ x\in S}}\frac{1}{x}\left(\ln\frac{1}{f(x)}-h\ln F(x+0)\right)\le\sigma_{зб}\le\varlimsup_{\substack{x\to+\infty\\ x\in S}}\frac{1}{x}\left(\ln\frac{1}{f(x)}-\ln F(x-0)\right);$$

б) якщо функція $F\in L$ обмежена, тоді $\varliminf_{\substack{x\to+\infty\\ x\in S}}\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\le\sigma_{зб}$. Окрім того, якщо $(\forall\varepsilon>0):\int_{x_0}^{+\infty}e^{\varepsilon x}dF(x)=+\infty$, тоді $\sigma_{зб}\le\varlimsup_{\substack{x\to+\infty\\ x\in S}}\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}$.

Наслідок. Для абсциси збіжності інтеграла Лапласа $\int_0^{+\infty}f(x)e^{\sigma x}dx$ має місце нерівність $\varliminf_{\substack{x\to+\infty\\ x\in S}}\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\le\sigma_{зб}\le\varlimsup_{\substack{x\to+\infty\\ x\in S}}\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}$.

1. Вишневский В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / В. М. Вишневский – Москва: Техносфера, 2003. – 512 с. 2. Тихоненко О. М. Моделирование процессов и систем обработки информации: курс лекций / О. М. Тихоненко – Мн.: БГУ, 2007. – 147 с. 3. Назаров А. А. Теория массового обслуживания: учебное пособие / А. А. Назаров, А. Ф. Терпухов – Томск: Изд-во НТЛ, 2004. –228 с. 4. Задорожна О. Ю. Елементарні зауваження про абсциси збіжності інтегралів Лапласа-Стілтьєса / О. Ю. Задорожна, О. Б. Скасків // Буков. мат. журн. – 2013. – Т1, №3-4. – С.45-50.

КРИТЕРІЇ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНОГО ЗРОСТАННЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ НУЛЬОВОГО ПОРЯДКУ

Костюк О.В.

Національний університет "Львівська політехніка"

Аналітичну в усій комплексній площині функцію називають цілою. Оскільки довільну цілу функцію можна розвинути в збіжний в $\boldsymbol{C}$ степеневий ряд, то їх ще називають многочленами нескінченно великого степеня.

Нехай $M(r;f)=\max\{|f(z)|:|z|\le r\}$ - максимум модуля функції f в крузі. Порядком цілої функції f називається число

$$\rho=\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\ln M(r;f)}{\ln r}.$$

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua